

Integração numérica em análises do MEFE/G para problemas fisicamente não lineares e propagação de trinca coesiva

On the numerical integration in G/XFEM analysis for physically nonlinear problems and cohesive crack propagation

Bruna C. Campos¹, Felício B. Barros¹, Samuel S. Penna¹

¹*Departamento de Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais
Av. Antônio Carlos, 6627, Escola de Engenharia, Bloco 1, 4º andar, sala 4215, Pampulha - CEP 31270-901 - Belo Horizonte/MG, Brasil
bu_caroline@hotmail.com, felicio@dees.ufmg.br, spenna@dees.ufmg.br*

Abstract. This work presents a novel methodology to deal with some drawbacks related to crack propagation in physically nonlinear problems in the context of the Generalized Finite Element Method (GFEM). The GFEM associates Finite Element Method shape functions to local approximation functions that describe, for example, the discontinuity from Fracture Mechanics cohesive crack problems. In this case, numerical integration must be adapted for properly dealing with the non-polynomial integrand of the weak form of the boundary value problem. A common alternative to consider the discontinuity is the employment of the subdivision of elements, in the integration points are changed according to the cited strategy. Although a very efficient procedure in linear problems, it leads to the loss of the state constitutive variables history, responsible for indicating the degradation level in physically nonlinear materials. A new strategy is here proposed, based on the nonlocal approach to recover the evolution of the state constitutive variables in the integration points. A numerical example is provided to validate and prove the efficiency of the proposed methodology. The computational implementation and analysis are performed in the open source software INSANE (Interactive Structural Analysis Environment), developed by the Structural Engineering Department of Federal University of Minas Gerais.

Keywords: Generalized/eXtended Finite Element Method, Numerical Integration, Fracture Mechanics, Physically Nonlinear Analysis, Cohesive Crack Propagation

Resumo. O presente trabalho apresenta uma nova metodologia para lidar com aspectos relacionados à propagação de trincas em meios fisicamente não lineares no contexto do Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG). O MEFG associa funções de forma do Método dos Elementos Finitos com funções de aproximação local que descrevem, por exemplo, a descontinuidade em problemas da Mecânica da Fratura. Nesse caso, a integração numérica precisa ser adaptada para tratar o integrando não polinomial da forma fraca do problema de valor de contorno. Uma alternativa para se considerar a descontinuidade é empregar a estratégia de subdivisão de elementos, onde os pontos de integração são modificados segundo tal técnica. Embora seja uma solução bastante eficaz em problemas lineares, esta leva à perda do histórico das variáveis constitutivas, responsáveis por indicar o nível de degradação em materiais fisicamente não lineares. Uma nova estratégia é aqui proposta, baseada na abordagem não local, para recuperar a evolução das variáveis constitutivas nos novos pontos de integração. Apresenta-se um exemplo numérico a fim de mostrar a eficiência da metodologia proposta. A implementação e as análises computacionais são realizadas na plataforma de código aberto INSANE (*Interactive Structural Analysis Environment*), desenvolvida pelo Departamento de Engenharia de Estruturas da Universidade Federal de Minas Gerais.

Palavras-chave: Método dos Elementos Finitos Generalizados/Estendido, Integração Numérica, Mecânica da Fratura, Análise Fisicamente Não Linear, Propagação de Trinca Coesiva

1 Introdução

O Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) [1–5] é uma ferramenta eficaz para se contornar a dependência de malha – existente no Método dos Elementos Finitos (MEF) – inerente em problemas advindos da Mecânica da Fratura, onde a trinca é explicitamente representada. Da mesma forma, o Método dos Elementos Finitos Estendido (MEFE) [6, 7] também se propõe a empregar um enriquecimento explícito da aproximação. Dada a similaridade entre ambos, segundo Fries e Belytschko [8], MEFE e MEFG serão aqui mencionados como MEFE/G.

A integração numérica em modelos de representação explícita da trinca deve ser cuidadosamente analisada, visto que, ao se empregar as funções de enriquecimento advindas do MEFE/G, o integrando da forma fraca do problema de valor de contorno perde sua característica polinomial. Assim, a integração pela quadratura de Gauss – tradicionalmente utilizada em MEF – não tem mais sua exatidão garantida, e torna-se necessário a busca de estratégias alternativas.

Uma opção para a integração numérica é o emprego da subdivisão de elementos, estratégia empregada no presente trabalho. Nesta, os pontos de integração convencionais são trocados por novos pontos posicionados segundo a subdivisão do elemento cortado pela trinca em células triangulares. Entretanto, ao se tratar de modelos com não linearidade física, deve-se atentar ao fato de que esta troca dos pontos leva à perda das variáveis históricas do modelo constitutivo, armazenadas nos pontos de integração originais.

Propõe-se, neste trabalho, um novo método de transferência das variáveis históricas, inspirado na formulação não local apresentada por Bazant [9] e Jirásek [10]. As variáveis armazenadas nos pontos de integração originais são transferidas para os novos pontos através de uma função peso, e. g. a função Gaussiana. No exemplo numérico apresentado, observa-se que tal estratégia leva à representação mais acurada do padrão de dano e é relacionado com menores tempos de processamento.

O trabalho está organizado da seguinte forma: na seção 2 é apresentada a formulação do MEFE/G voltada para a propagação de trincas coesivas em meio fisicamente não linear. Na seção 3 são destacados os aspectos computacionais envolvendo a estratégia de subdivisão de elementos, e propõe-se a nova técnica para transferência das variáveis de estado. Na seção 4 é apresentado um exemplo numérico com a finalidade de validar as estratégias citadas. Por fim, a seção 5 contém as principais conclusões acerca do texto.

2 MEFE/G para análise não linear

2.1 Formulação do MEFE/G

O MEFE/G associa as funções de forma do MEF convencional, tomadas como uma Partição da Unidade (PU) $\mathcal{N}_j(\mathbf{x})$ em um dado nó \mathbf{x}_j do domínio, com funções de aproximação que representam comportamentos locais de um determinado problema.

Dado o conjunto I_j formado por q_j funções linearmente independentes, cada termo do mesmo é uma função de aproximação L_{ji} , ou função de enriquecimento. A multiplicação de tais funções L_{ji} pela PU resulta então no conjunto de funções de forma ϕ_{ji} do MEFE/G:

$$\{\phi_{ji}\}_{i=1}^{q_j} = \mathcal{N}_j(\mathbf{x}) \times \{L_{ji}(\mathbf{x})\}_{i=1}^{q_j}, \quad (1)$$

sem somatória em j .

A aproximação do campo de deslocamentos feita pelo MEFE/G é descrita então por:

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \mathcal{N}_j(\mathbf{x}) \left\{ u_j + \sum_{i=2}^{q_j} L_{ji}(\mathbf{x}) b_{ji} \right\}, \quad (2)$$

onde u_j e b_{ji} são parâmetros nodais associados com as funções de forma $\mathcal{N}_j(\mathbf{x})$ do MEF e $\mathcal{N}_j(\mathbf{x}) \cdot L_{ji}(\mathbf{x})$ do MEFE/G, respectivamente.

2.2 Propagação de trinca coesiva

Durante o processo de propagação, segundo a implementação computacional aqui utilizada, a trinca atravessa completamente o elemento no qual é detectada. Portanto, a ponta da trinca está sempre contida no contorno de um determinado elemento do domínio. Logo, o enriquecimento utilizado para representação da descontinuidade é dado unicamente pela função de Heaviside, conforme apresentada por Pereira et. al. [11]:

$$H(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{se } \phi(\mathbf{x}) < 0 \\ 0, & \text{se } \phi(\mathbf{x}) > 0 \end{cases}, \quad (3)$$

onde $\phi(\mathbf{x})$ é uma função de distância usada para descrever a posição da interface:

$$\phi(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| \text{sign}(\mathbf{n}_{\Gamma_c} \cdot [\mathbf{x} - \mathbf{x}^*]), \quad (4)$$

onde \mathbf{x}^* é o ponto mais próximo da projeção de \mathbf{x} na descontinuidade Γ_c , \mathbf{n}_{Γ_c} é o vetor normal à interface em \mathbf{x}^* e $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|$ é a distância de \mathbf{x} até Γ_c .

Neste trabalho, para a descrição da trinca, são consideradas as forças coesivas que aparecem nas superfícies da mesma. Assim, associa-se o processo de enriquecimento com o modelo constitutivo adotado, fazendo com que a relação tensão deformação seja propriamente representada. Segundo Wells e Sluys [12], a tensão coesiva existente na trinca \mathbf{t} pode ser dividida em uma componente normal t_n e uma componente de cisalhante t_s . A componente t_n é dada por:

$$t_n = f_t e^{(-\kappa f_t / G_f)}, \quad (5)$$

onde f_t é a resistência do material à tração, G_f é a energia de fratura e κ é um parâmetro histórico associado à seguinte função de carregamento:

$$f(\llbracket u(\mathbf{x}) \rrbracket_n, \kappa) = \llbracket u(\mathbf{x}) \rrbracket_n - \kappa, \quad (6)$$

com $\llbracket u(\mathbf{x}) \rrbracket_n$ sendo a separação normal entre as superfícies da fissura.

A componente cisalhante t_s é dada por:

$$t_s = d_{init} e^{(h_s \kappa)} \llbracket u(\mathbf{x}) \rrbracket_s, \quad (7)$$

onde d_{init} é a resistência inicial da fissura ao cisalhamento, $\llbracket u(\mathbf{x}) \rrbracket_s$ é o deslizamento tangencial relativo das superfícies da fissura e h_s é dado por:

$$h_s = \ln(d_{\kappa=1,0} / d_{init}), \quad (8)$$

com $d_{\kappa=1,0}$ sendo a rigidez da fissura ao cisalhamento, definida para $\kappa = 1, 0$.

3 Aspectos computacionais

3.1 Integração numérica

Para problemas do MEF, utiliza-se comumente a integração numérica pela quadratura de Gauss. Uma das características dessa estratégia é a necessidade de que, para garantir a exatidão do método, o integrando da forma fraca do problema de valor de contorno seja polinomial. Ao lidar com problemas do MEF/G, devido às funções de enriquecimento, o integrando perde seu caráter polinomial e torna-se fundamental a busca de novas estratégias de integração.

Existem na literatura diversas propostas para lidar com a integração numérica em problemas da Mecânica da Fratura no contexto do MEF/G. Uma revisão sobre o tema pode ser encontrada em Campos et. al. [13]. No presente trabalho, a estratégia empregada é a subdivisão de elementos, onde o elemento contendo a descontinuidade é subdividido em triângulos em ambos os lados da trinca. A quadratura de Gauss para triângulos, proposta por Dunavant [14], é então aplicada em cada célula triangular, não sendo gerados graus de liberdade adicionais.

3.2 Técnica de transferência das variáveis históricas

Em problemas fisicamente não lineares, os pontos de integração armazenam dados importantes para o processo incremental iterativo. É neles que as variáveis de estado estão guardadas, indicando o histórico de carregamento de cada ponto e, conseqüentemente, do elemento ao qual pertence. Quando a estratégia de subdivisão de elementos é aplicada, após o surgimento da trinca, os pontos de integração originais (advindos da quadratura de Gauss) são removidos para que os novos pontos (advindos da subdivisão de elementos) sejam posicionados. Estes, por sua vez, não possuem o histórico das variáveis de estado, sendo necessária, portanto, a determinação de uma técnica que faça o armazenamento das mesmas.

Existem diversas estratégias propostas na literatura para lidar com a transferência dessas variáveis, e uma revisão teórica a respeito das mesmas pode ser encontrada em Patzák e Jirásek [15]. Neste trabalho, uma nova técnica é proposta, inspirada na abordagem da formulação não local. Segundo Jirásek [10], um modelo não local considera que a tensão em um ponto depende não somente das variáveis de estado desse ponto, mas também da distribuição de tais variáveis nos arredores do ponto considerado. Em problemas bidimensionais, portanto, uma variável de estado é calculada considerando uma média ponderada do seu valor nos pontos de integração pertencentes a um domínio definido por um raio de alcance.

Seja $\tilde{f}(\mathbf{x})$ a contraparte não local de um campo genérico $f(\mathbf{x})$ e $A(\mathbf{x})$ a região circular considerada. Então:

$$\tilde{f}(\mathbf{x}) = \frac{1}{A(\mathbf{x})} \int_A \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}) dA, \quad (9)$$

onde $\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ é uma função peso, \mathbf{s} é a coordenada dos pontos de integração antigos pertencentes à região $A(\mathbf{x})$ e \mathbf{x} é a coordenada do ponto no qual $\tilde{f}(\mathbf{x})$ está sendo calculada.

Para a presente implementação computacional, considerou-se que:

- a função peso $\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ empregada é a função Gaussiana:

$$\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = e\left(-\frac{d^2}{r^2}\right), \quad (10)$$

onde d é a distância $\|\mathbf{x} - \mathbf{s}\|$ e r é o raio do domínio não local $A(\mathbf{x})$.

- o conjunto de pontos com coordenadas \mathbf{s} , dado pelo domínio $A(\mathbf{x})$, é formado por pontos de integração antigos localizados no elemento onde a técnica de transferência das variáveis de estado é realizada.

As variáveis de estado a serem transferidas variam conforme o modelo constitutivo adotado. No exemplo numérico apresentado a seguir é considerado o modelo de fissuração distribuída [16–19], onde as variáveis envolvidas são: variáveis de dano, derivadas das leis de dano, parâmetros históricos, funções de carregamento nas direções normal e tangencial à fissura e a matriz de transformação. Esta última, por não ser um escalar, é transferida para os novos pontos de integração através da técnica proposta por Patzák [15] denominada *closest point transfer*. Nesta, a matriz do ponto original mais próximo de cada novo ponto é copiada para o mesmo.

A técnica de transferência das variáveis, quando executada desta maneira, pode gerar um desequilíbrio no elemento no qual é aplicada. Por esse motivo, no passo seguinte à transferência, o processo incremental iterativo requer algumas iterações a mais para restaurá-lo. Entretanto, a reobtenção do equilíbrio não acarreta aumento significativo no custo computacional, conforme visto no exemplo numérico seguinte.

4 Exemplo numérico: Painel em L

Nesta seção é apresentado o problema de um painel em L, com o intuito de validar a técnica proposta de transferência das variáveis de estado. Para isso, as séries de dados em comparação são identificadas por *IC* – integração convencional – e *IS* – integração com subdivisão de elementos e transferência de variáveis.

O painel simulado é ilustrado na Fig. 1a. As propriedades do material são: módulo de elasticidade $E = 25850 \text{ N/mm}^2$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,18$, resistência à compressão $f_c = 31,0 \text{ N/mm}^2$, resistência à tração $f_t = 2,7 \text{ N/mm}^2$, energia de fratura $G_f = 0,065 \text{ N/mm}$, comprimento característico $h = 28 \text{ mm}$ e deformação relativa ao limite elástico na compressão $\varepsilon_c = 0,0022$.

Para estado plano de tensão, a malha adotada (Fig. 1b) é de 636 elementos triangulares de três nós *T3*, com tamanho médio do elemento igual a 25 mm . O problema é solucionado com método de controle de deslocamento e incremento de $0,01 \text{ mm}$ no ponto de deslocamento vertical máximo. A tolerância adotada é de 1×10^{-3} e a carga de referência é $q = 28,0 \text{ N/mm}$.

Para a série *IC*, adota-se 6 pontos de Gauss por elemento triangular. Na série *IS*, são considerados 3 pontos por célula triangular, totalizando 9 pontos nos elementos atravessados pela trinca. Nos demais elementos, matêm-se 3 pontos de integração. Vale ressaltar que as quadraturas de Gauss para triângulos aqui empregadas foram propostas por Dunavant [14]. O parâmetro r da função Gaussiana (eq. 10) é dado por $r = 20$. Maiores discussões acerca da determinação desse parâmetro são encontradas em Campos [20].

A simulação é feita considerando-se modelo de fissuração distribuída com direção fixa. O padrão de dano é ilustrado na Fig. 2 para ambas estratégias de integração. Observa-se que, apesar de ser parecida nos dois casos, a zona de dano é melhor representada pela série *IS*. A Fig. 3 ilustra as trajetórias de equilíbrio obtidas, com ótima concordância entre si. O padrão experimental obtido por Winkler [21] também é indicado, e nota-se que o pico de carga atingido pelas simulações numéricas é menor do que o obtido experimentalmente. Essa diferença está vinculada ao modelo de trinca discreta adotado, o qual agrega certa fragilidade ao problema.

O tempo de processamento acumulado para as séries *IC* e *IS* é ilustrado na Fig. 4. Observa-se que a série *IS* tem tempos menores, mesmo com mais pontos de integração (9, enquanto a série *IC* tem 6) nos elementos

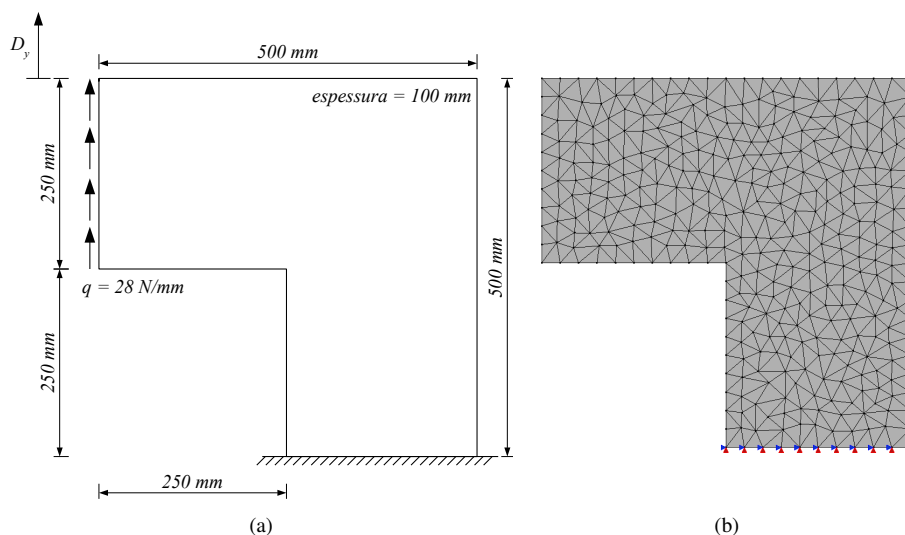


Figura 1. Painel em L: (a) configuração e (b) malha.

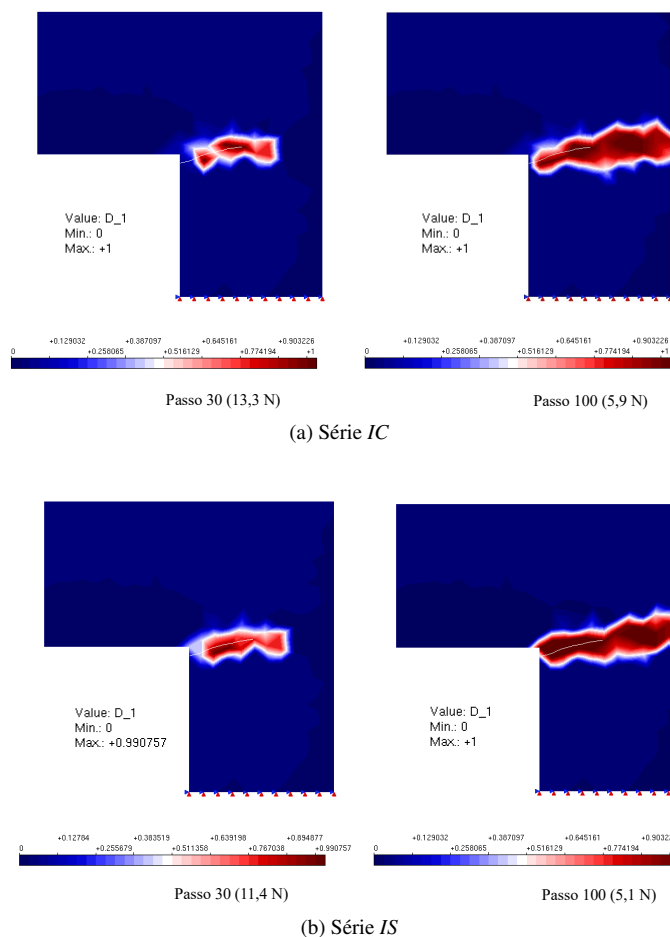


Figura 2. Painel em L: comparação do padrão de dano.

atravessados pela trinca. Isso acontece devido ao número superior de iterações que a série *IC* apresenta – 1534, enquanto a série *IS* requer 1448 iterações, totalizando 86 a menos.

Observa-se, portanto, que a subdivisão de elementos associada à transferência de variáveis de estado mostra-se como uma metodologia eficaz para lidar com problemas da Mecânica da Fratura associados ao MEF/E/G. Para o

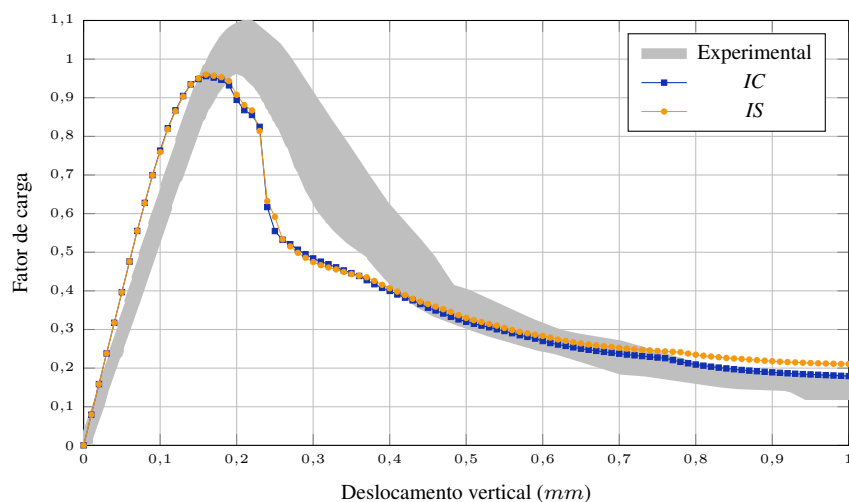


Figura 3. Painel em L: trajetória de equilíbrio para as estratégias IC e IS.

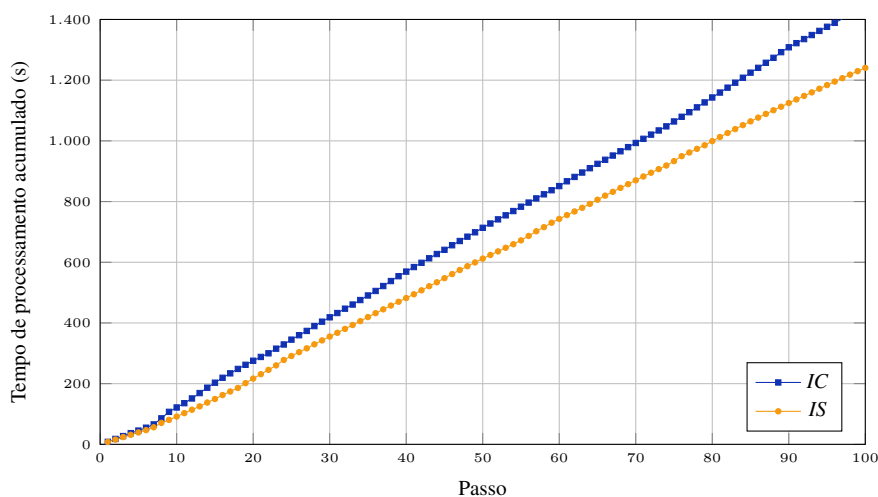


Figura 4. Painel em L: tempo de processamento acumulado.

problema, neste trabalho avaliado, o padrão de dano é melhor representado e o tempo de processamento é reduzido ao empregá-la. Os resultados numéricos aqui obtidos são condizentes com o resultado experimental apresentado em Winkler [21].

5 Conclusão

Neste trabalho apresentou-se uma nova técnica de transferência de variáveis históricas a ser empregada em elementos atravessados por uma trinca coesiva, no contexto da Mecânica da Fratura e para simulações com o MEFE/G. A técnica em questão teve como inspiração a formulação não local, onde, por meio de uma função peso, as variáveis constitutivas de um ponto de integração novo (posicionado segundo a estratégia de subdivisão de elementos) são obtidas pela média ponderada de seus respectivos valores nos pontos de integração originais (previamente posicionados segundo a quadratura de Gauss convencional).

Por meio do exemplo numérico de um painel em L, a estratégia de transferência se mostrou eficaz na representação do padrão de dano e na obtenção da trajetória de equilíbrio. Os resultados obtidos foram similares aos advindos da integração convencional; todavia, o tempo de processamento é reduzido ao se utilizar a integração exata proporcionada pela subdivisão de elementos.

Estudos futuros são necessários no âmbito de expandir a técnica de transferência proposta para outros modelos de dano. Além disso, mostra-se necessária a viabilidade da mesma para problemas onde a ponta da trinca descansa no interior do elemento. Neste caso, acredita-se que o emprego desta técnica seja ainda mais justificado, devido à dificuldade de se empregar a integração de Gauss convencional para representar o integrando neste elemento.

Agradecimento. Os autores agradecem o apoio financeiro concedido pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), projetos 304211/2019-2, 437639/2018-5 e 311663/2017-6.

Authorship statement. The authors hereby confirm that they are the sole liable persons responsible for the authorship of this work, and that all material that has been herein included as part of the present paper is either the property (and authorship) of the authors, or has the permission of the owners to be included here.

Referências

- [1] Babuška, I., Caloz, G., & Osborn, J. E., 1994. Special Finite Element Methods for a Class of Second Order Elliptic Problems with Rough Coefficients. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 31, n. 4, pp. 945–981.
- [2] Melenk, J. M., 1995. *On Generalized Finite Element Methods*. Tese de doutorado, University of Maryland, College Park.
- [3] Duarte, C. A. & Oden, J. T., 1995. Hp clouds - a meshless method to solve boundary-value problem. Technical report, TICAM, The University of Texas at Austin. Technical Report.
- [4] Duarte, C. A. & Oden, J. T., 1996a. An h-p adaptive method using cloud. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 139, pp. 237–262.
- [5] Duarte, C. A. M. & Oden, J. T., 1996b. H-p clouds-an h-p meshless method. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, vol. 12, n. 6, pp. 673–705.
- [6] Belytschko, T. & Black, T., 1999. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 45, n. 5, pp. 601–620.
- [7] Moës, N., Dolbow, J., & Belytschko, T., 1999. A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 46, n. 1, pp. 131–150.
- [8] Fries, T. P. & Belytschko, T., 2010. The extended / generalized finite element method : An overview of the method and its applications. *Review Literature And Arts Of The Americas*, vol. , n. April, pp. 253–304.
- [9] Bažant, Z. P. & Jirásek, M., 2002. Nonlocal Integral Formulations of Plasticity and Damage: Survey of Progress. *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 128, n. 11, pp. 1119–1149.
- [10] Jirásek, M., 2004. Non-local damage mechanics with application to concrete. *Revue Française de Génie Civil*, vol. 8, n. 5-6, pp. 683–707.
- [11] Pereira, J. P., Duarte, C. A., Guoy, D., & Jiao, X., 2009. hp-Generalized FEM and crack surface representation for non-planar 3-D cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 77, n. 5, pp. 601–633.
- [12] Wells, G. N. & Sluys, L. J., 2001. A new method for modelling cohesive cracks using finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 50, pp. 2667–2682.
- [13] Campos, B. C., Barros, F. B., & Penna, S. S., 2020. On the numerical integration in Generalized/Extended Finite Element Method analysis for crack propagation problems. *Engineering Computations*, vol. to appear, n. to appear.
- [14] Dunavant, D. A., 1985. High degree efficient symmetrical Gaussian quadrature rules for the triangle. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 21, n. 6, pp. 1129–1148.
- [15] Patzák, B. & Jirásek, M., 2004. Adaptive Resolution of Localized Damage in Quasi-brittle Materials. *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 130, pp. 720–732.
- [16] Bažant, Z. P. & Oh, B. H., 1983. Crack band theory for fracture of concrete. *Matériaux et Construction*, vol. 16, pp. 155–177.
- [17] Rots, J. G., Nauta, P., Kusters, G. M. A., & Blaauwendraad, J., 1985. Smearred crack approach and fracture localization in concrete. *HERON*, vol. 30, n. 1, pp. 923–955.
- [18] Rots, J. G., 1988. *Computational Modeling of Concrete Fracture*. Tese de Doutorado, Delft University of Technology, Delft, Netherlands.
- [19] de Borst, R. & Gutiérrez, M. A., 1999. A unified framework for concrete damage and fracture models including size effects. *International Journal of Fracture*, vol. 95, pp. 261–277.
- [20] Campos, B. C., 2020. Integração numérica por decomposição de elementos no contexto do método dos elementos finitos generalizados. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- [21] Winkler, B., Hofstetter, G., & Lehar, H., 2004. Application of a constitutive model for concrete to the analysis of a precast segmental tunnel lining. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol. 28, pp. 797–819.