

ANÁLISE DE MEIOS PARCIALMENTE FRÁGEIS VIA ABORDAGEM GLOBAL-LOCAL COM MÉTODOS SEM MALHA

Débora Coelho Cordeiro Pinheiro

Felício Bruzzi Barros

Roque Luiz da Silva Pitangueira

Samuel Silva Penna

deboracordeiro@ufmg.br

felicio@dees.ufmg.br

roque@dees.ufmg.br

spenna@dees.ufmg.br

Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas – Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)

Av. Antônio Carlos, 6627 - Escola de Engenharia - Bloco 1 - 4o andar, sala 4215, Pampulha, CEP 31270-901, MG, Belo Horizonte, Brasil

Abstract. Meshfree Methods have been used as alternatives to Finite Element Method, due to the flexibility in building conforming approximations. Another attractive feature is the capacity of obtaining approximate solutions of high regularity. Such characteristics can be successfully used to describe state variables based on the derivatives of the problem solution and responsible for representing the nonlinear behavior of structures of quasi-brittle material. On the other hand, the lack of the Kronecker-delta property, a more complex computation of the shape functions and numerical integration problems represent drawbacks that can overburden the computational analysis. In nonlinear analysis, the time processing becomes an important issue to be considered. Aiming to conciliate the efficiency of finite element analysis with the flexibility of meshfree methods, coupling techniques for both methods have been proposed, especially in cases where the nonlinear phenomenon is confined in a small part of the structure. Here, a new coupling strategy is proposed based on the Global-local Generalized Finite Element Method (GFEM-gl) to simulate damage propagation in quasi-brittle media. The global domain of the structure is represented by a coarse mesh of finite elements. The region of damage propagation defines the local domain, represented by a set of nodes of the meshfree approach called Element Free Galerkin Method (EFG). This local discretization is responsible for providing a numerically obtained function used to enrich the approximate solution of the global problem. Numerical examples in two-dimensional domain are presented to discuss how the meshfree method can efficiently describe the damage propagation, while the global behavior of the structure is represented by the enriched finite element solution.

Keywords: Meshless Methods, Global-Local Strategy, Physically Nonlinear Analysis, Meshfree Methods, INSANE.

Resumo. Os Métodos sem Malha tem sido usados como alternativas ao Método dos Elementos finitos devido a sua flexibilidade na construção de aproximações conformes. Outra característica atrativa destes métodos é sua capacidade de obtenção de aproximações de alta regularidade. Tais características podem ser empregadas com sucesso na obtenção das variáveis de estado baseadas nas derivadas da solução do problema e responsáveis por representar o comportamento não linear de meios parcialmente frágeis. Por outro lado, fatores como falta de propriedade de delta de Kronecker, funções de forma não polinomiais e problemas na integração numérica apresentam desvantagens que aumentam o custo computacional da análise. Na análise não linear, o tempo de processamento se torna um importante fator a ser considerado. Com o objetivo de conciliar a eficiência do Método dos Elementos Finitos com a flexibilidade

dos Métodos sem Malha, técnicas de acoplamento dos dois métodos foram propostas, especialmente nos casos nos quais o fenômeno não linear é confinado a uma parte pequena da estrutura. Neste trabalho, é proposta uma nova estratégia baseada na abordagem global-local do Método dos Elementos Finitos Generalizados para simular a propagação de dano em meios parcialmente frágeis. O domínio global da estrutura é representado por uma malha grosseira de elementos finitos. A região onde ocorre a propagação de dano define o domínio local, representado por um conjunto de nós do Método sem Malha *Element Free Galerkin* (EFG). A discretização local é responsável por prover funções numericamente obtidas para enriquecimento da solução aproximada do problema global. Exemplos numéricos bidimensionais são apresentados com o objetivo de discutir como Métodos sem Malha podem descrever de forma eficiente a propagação de dano, enquanto o comportamento global da estrutura é representado por uma solução do método dos elementos finitos enriquecida.

Palavras-Chave: Métodos sem Malha, Estratégia Global-Local, Análise Fisicamente Não Linear, INSANE.

1 Introdução

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é amplamente empregado na mecânica computacional e diversos estudos têm sido feitos para aperfeiçoá-lo. Desta maneira, a busca por novos métodos numéricos surge da necessidade de representar fenômenos que não são descritos satisfatoriamente pelo MEF convencional [1]. Fazem parte deste grupo, por exemplo, problemas que envolvam grandes deformações e a descrição geométrica de propagação de trincas. Nestes casos, as mudanças significativas na geometria do domínio discretizado demandam a contínua reformulação da malha quando a análise é feita através do MEF, o que torna esse tipo de estudo bastante custoso do ponto de vista computacional [2].

Neste contexto, surge um novo grupo de métodos numéricos categorizado como Métodos sem Malha. Segundo a definição encontrada em Duarte [2], classificam-se como Método sem Malha aqueles onde as equações que governam o modelo discreto de um problema de valor de contorno não dependem da existência de uma malha bem definida. No MEF, a aproximação da solução é obtida a partir de interpolações locais em cada elemento. Desta forma, a continuidade da aproximação é garantida pela conectividade preestabelecida entre os nós.

O emprego destes métodos em todo o domínio do problema pode encontrar o obstáculo do encarecimento excessivo do processamento, já que um grande número de pontos de integração é necessário (as aproximações são, geralmente, não-polinomiais e não têm seu suporte associado às células de integração adotadas) e a conectividade dos nós é definida em tempo de execução. Sendo assim, alguns trabalhos disponíveis na literatura reservam a aplicação dos Métodos sem Malha somente a zonas de interesse limitadas. Uma técnica que emprega os Métodos sem Malha somente nas regiões de interesse é o acoplamento de zonas modeladas através de um Método sem Malha àquelas modeladas com elementos finitos, como em Belytschko et al. [3], Hegen [4], Rao e Rahman [5], Gu e Zhang [6], Yuan et al. [7] e Liu e Gu [8]. Justifica-se, assim, a proposta deste trabalho de se propor um nova abordagem para a técnica global-local de Duarte e Babuška [9], onde as funções de enriquecimento do problema global são obtidas numericamente por meio da solução de problemas locais nas zonas de interesse resolvidos por um Método sem Malha.

Nos Métodos da Partição da Unidade (*Generalized/Extended Finite Element Method - G/XFEM, Partition of Unity Finite Element Method - PUFEM, Partition of Unity Method - PUM, hp-Clouds*) a aproximação é construída com base em funções de Partição da Unidade (PU) enriquecidas, de maneira extrínseca, pela sua multiplicação por uma base de funções especialmente escolhidas para o tipo de problema a ser descrito. O emprego de uma base extrínseca adicional tem por objetivo o aumento da ordem de consistência da aproximação ou melhora da aproximação com base na inclusão de funções que contemplem aspectos da solução do Problema de Valor de Contorno (PVC) conhecidos *a priori* [10].

O enriquecimento extrínseco é uma das principais vantagens dos métodos ditos da Partição da Unidade. A eficácia de métodos com PU está ligada à escolha apropriada das funções de enriquecimento [11]. Funções de enriquecimento adequadas podem ser usadas para modelar fissuras, singularidades, inclusões, vazios, entre outras particularidades. Para algumas classes de problemas, a construção de funções de enriquecimento cuja expressão seja adequada ao fenômeno aproximado pode não ser possível. O trabalho de Duarte e Babuška [9] apresenta um procedimento para construção de funções de enriquecimento para métodos que empregam a Partição da Unidade, a chamada abordagem global-local aplicada ao GFEM, o chamado GFEM-gl. Conforme apresentado em Gupta et al. [12], fazem parte da classe de problemas que podem beneficiar-se do emprego do GFEM-gl: os problemas de fissuras em três dimensões, os problemas multiescala, os fenômenos não lineares, entre outros.

No GFEM-gl, um PVC local com condições de contorno provenientes da análise de um problema global grosseiramente discretizado é resolvido. Em seguida, a solução do problema local é utilizada para formar a base extrínseca da solução do problema global. Finalmente, o problema global enriquecido é resolvido. Em diversos trabalhos esta estratégia foi empregada com sucesso [11, 13–16], todos eles construindo-se a aproximação dos modelos global e local por meio da abordagem do G/XFEM. É, contudo, possível segundo Duarte e Kim [11] empregar outros métodos na discretização dos modelos locais.

Neste trabalho, a solução numérica usada para enriquecer o problema global será obtida via Métodos sem Malha. Espera-se que o fenômeno local seja melhor descrito pelas funções de um Métodos sem Malha enquanto que o comportamento global continuará sendo descrito pelo MEF/GFEM. A motivação para o emprego de Métodos sem Malha nos problemas locais da abordagem global-local é baseada em características destes métodos tais como versatilidade na construção de aproximações conformes para problemas específicos, capacidade de obtenção de aproximações de alta regularidade, capacidade de regularização devido ao caráter não-local e aproximação numérica menos sensível à distribuição nodal devido à ausência de malha.

Este trabalho está inserido no contexto geral da análise não-linear de meios parcialmente frágeis. Especificamente, no trabalho aqui enunciado, procura-se desenvolver uma formulação de uma abordagem global-local associada ao Método *Element Free Galerkin* (EFG) [17] implementando-a no INSANE (*Interactive Structural Analysis Environment*).

O INSANE [18] é um projeto de *software* livre em desenvolvimento no Departamento de Engenharia de Estruturas da Universidade Federal de Minas Gerais que torna disponível um ambiente computacional de código aberto, com características tais que facilitem sua expansão e manutenção. A linguagem JAVA é utilizada no desenvolvimento das aplicações do INSANE. Por apresentar vantagens como a portabilidade, que possibilita a criação de um software cujo funcionamento independe do sistema operacional, e o suporte ao paradigma da Programação Orientada a Objetos (POO), a utilização da linguagem JAVA favorece a expansão do software e o trabalho em equipe.

2 Métodos sem Malha

Os Métodos sem Malha surgiram em resposta à algumas limitações do MEF convencional para tratar problemas que envolvem remalhamento, como, no contexto da mecânica dos sólidos, problemas de propagação de trincas e de grandes deformações [1]. Os Métodos sem Malha são métodos numéricos cuja aproximação é definida a partir de nós cuja conectividade não é definida *a priori* [10]. Nestes métodos, a conectividade dos nós é definida em tempo de execução. Por isso, este grupo de métodos mostra-se adequado para problemas de propagação de fissuras, como em Dufloy e Nguyen-Dang [19] e Kumar [20], e grandes deformações, como em Rabczuk e Eibl [21], ou ambos, como em Bordas et al. [22]. Além disso, alguns tipos de Métodos sem Malha suportam bem a adaptatividade *hp* [23].

Alguns dos Métodos sem Malha já propostos são:

1. *Smoothed Particle Hydrodynamics* (SPH), de Monaghan [24, 25];
2. Métodos baseados diretamente nas aproximações de Mínimos Quadrados Móveis (*Moving Least Squares* - MLS)
 - (a) *Difuse Element Method* (DEM), introduzido em Nayroles et al. [26];
 - (b) *Element Free Galerkin Method* (EFG), de Belytschko et al. [17];
 - (c) *Finite Point Method* (FPM), de Oñate et al. [27], Oñate et al. [28] e Oñate et al. [29];
3. Métodos baseados na definição da Partição da Unidade
 - (a) *hp-Clouds Method*, de Duarte [30], Duarte e Oden [31, 32, 33];
 - (b) *Partition of Unity Finite Element Method* (PUFEM), apresentado em Melenk [34], Melenk e Babuška [35] e Babuška e Melenk [36];
4. *Reproducing Kernel Particle Method* (RKPM), de Liu et al. [37, 38];
5. *Meshless Local Petrov-Galerkin Method* (MLPG), de Atluri e Zhu [39];
6. *Wavelet Galerkin Method*, proposto por Amaratuga e Williams [40];
7. Família de *Point Interpolation Methods*
 - (a) *Point Interpolation Method* (PIM), de Liu e Gu [41, 42];
 - (b) *Radial Point Interpolation Method* (RPIM), de Wang e Liu [43];
 - (c) *Node-based Smoothed Point Interpolation Method* (NS-PIM), de Zhang et al. [44], onde foi inicialmente proposto como *Linearly Conforming Point Interpolation Method* (LC-PIM);
 - (d) *Edge-based Smoothed Point Interpolation Method* (ES-PIM), de Liu e Zhang [45];
 - (e) *Cell-based Smoothed Point Interpolation Method* (CS-PIM), de Liu e Zhang [46];

Maiores informações sobre os diversos Métodos sem Malha existentes podem ser encontradas em Belytschko et al. [47], Fries e Matthias [10] e Daxini e Prajapati [48].

2.1 Métodos sem Malha para materiais parcialmente frágeis

São várias as vantagens dos Métodos sem Malha para problemas de Mecânica do Dano Contínuo (MDC) e Mecânica da Fratura em materiais parcialmente frágeis como o concreto. A aproximação numérica é mais versátil e menos sensível à distribuição nodal, devido a ausência de malha e sua interpolação possui caráter não local [49]. Além disso, os Métodos sem Malha possuem uma maior ordem de continuidade, o que naturalmente suaviza o campo de tensões na ponta da trinca [22].

Nas últimas décadas, uma série de trabalhos sobre o estudo de fissuras e dano no concreto foi desenvolvida. Alguns deles empregaram Métodos sem Malha. Em Tiago e Leitão [50] o EFG foi usado na análise de dano em vigas de concreto armado. O trabalho de Barros [51] estudou o uso de Métodos sem Malha como o EFG e o *hp-Clouds* para análise não-linear física de estruturas reticuladas. Na tese de Silva [52], o EFG é empregado na análise fisicamente não-linear de estruturas de concreto. Tanto Barros [51] quanto Silva [52] constituem estudos focados na aplicação da Mecânica do Dano Contínuo (MDC).

Conforme mencionado em Gori [53], durante a fase de amolecimento, os fenômenos de degradação tendem a se concentrar em determinadas partes do corpo analisado, o que resulta na chamada localização de deformações. Na ocorrência deste fenômeno, a simulação numérica pode ter a qualidade dos resultados comprometida devido a fatores como: forte dependência de malha; iniciação prematura de fissuras; fratura frágil instantânea. Gori [53] investigou problemas de localização de deformações em meios parcialmente frágeis por meio de duas técnicas de regularização: emprego do contínuo micropolar [54] no nível da formulação; e emprego dos Métodos sem Malha dos tipos *Node-based Smoothed Point Interpolation Method* (NS-PIM) e o *Edge-based Smoothed Point Interpolation Method* (ES-PIM) no nível numérico.

Outros trabalhos como Liu et al. [55], Li et al. [56], Chen et al. [57], Chen et al. [58], Wang e Li [59] e Pérez Pozo et al. [60], assim como Gori [53], empregam Métodos sem Malha por sua habilidade de introduzir propriedades de regularização em problemas com localização de deformações. Em Liu et al. [55], Li et al. [56], Chen et al. [57], Chen et al. [58] e Wang e Li [59] é empregado o RKPM, enquanto em Pérez Pozo et al. [60] é empregado o FPM.

Alguns trabalhos buscam tirar proveito do caráter matemático não-local dos Métodos sem Malha, além da sua alta regularidade, para aplicá-los em problemas com formulação não-local do dano. Em Askes et al. [61], por exemplo, o EFG é empregado em simulações com formulações não-locais para o dano.

O *Extended Element Free Galerkin* (XEFG) foi utilizado em Rabczuk e Zi [62] e Zi et al. [63] na análise de trincas coesivas. O XEFG também foi empregado em Rabczuk et al. [64] na análise geometricamente não-linear de estruturas de concreto armado com trincas coesivas em três dimensões. Em Rabczuk et al. [65], o XEFG foi empregado na modelagem 3D de propagação de fissuras. O XEFG pode ser visto como um caso particular do *hp-Clouds*.

Em Ghosh e Chaudhuri [66] e Chaudhuri [67], a fratura no concreto é modelada através de uma estratégia multi-escala. O concreto é considerado homogêneo na escala macroscópica. Já na escala mesoscópica, a matriz cimentícia é modelada com um Método sem Malha. O método empregado em ambas as escalas é o XEFG.

Em Dong et al. [68], uma estratégia para estudo da fissuração do concreto é proposta, empregando um modelo de trinca coesiva combinada ao EFG-P [69], formulação desenvolvida a partir do EFG associado ao SPH.

Em Teixeira [70] e Spada et al. [71], são tratados problemas de homogeneização computacional onde aplica-se o método sem malha escolhido somente na meso-escala, onde a estrutura é considerada heterogênea. Em Teixeira [70], o EFG é empregado na modelagem numérica do concreto com heterogeneidade. O Elemento de Volume Representativo (EVR), considerando o concreto heterogêneo, é modelado com o EFG. A partir da solução do PVC no EVR, são estimadas as propriedades mecânicas macroscópicas do material. Em Spada et al. [71], uma abordagem multi-escala une o MEF, na escala

macroscópica, aos Métodos sem Malha, na escala mesoscópica, na modelagem de estruturas de alvenaria.

2.2 Acoplamento com Método dos Elementos Finitos

Como evidenciado nas seções anteriores, os Métodos sem Malha mostram-se bastante apropriados para a modelagem de fenômenos de dano e fissuração de diversos materiais, dentre eles o concreto. Entretanto, o emprego destes métodos em todo o domínio do problema pode encontrar o obstáculo do encarecimento excessivo do processamento, relacionado a busca pelo domínio de suporte e à integração de funções não polinomiais.

Por esta razão, alguns trabalhos disponíveis na literatura reservam a aplicação dos Métodos sem Malha somente a zonas limitadas do problema. Uma técnica que emprega os Métodos Sem Malha somente nas regiões de interesse é o acoplamento de zonas modeladas através de um Método sem Malha àquelas modeladas com elementos finitos. Os seguintes trabalhos empregam variações desta técnica: Belytschko et al. [3], Hegen [4], Rao e Rahman [5] e Gu e Zhang [6] com o acoplamento EFG-MEF, Yuan et al. [7] com o acoplamento RPIM-MEF e Liu e Gu [8] com o acoplamento MLPG-MEF. Além dos ganhos em termos de desempenho computacional, com o acoplamento com os elementos finitos, as condições de contorno de Dirichlet podem ser aplicadas diretamente, conforme enunciado em Belytschko et al. [3]. Em sua implementação do EFG no INSANE, Silva [52] também trabalhou com o acoplamento com o MEF.

Em Duarte et al. [23], o G/XFEM é utilizado na maior parte do domínio, enquanto uma variação do G/XFEM inspirada nos Métodos sem Malha, o GFEM- C^k de Duarte et al. [72], é utilizada em algumas regiões de interesse.

2.3 Propriedades dos Métodos sem Malha

A Tabela 1 apresenta um resumo dos trabalhos apresentados nesta Seção com o objetivo de evidenciar as já desenvolvidas aplicações dos Métodos sem Malha. Cada trabalho é associado às propriedades dos Métodos sem Malha que explora, a classe de problema que trata e a qual Método sem Malha aplica. São consideradas na Tabela 1, as seguintes características dos Métodos Sem Malha, indicadas na tabela segundo esta numeração:

1. versatilidade na construção de funções de forma conformes para problemas específicos;
2. funções podem ser construídas com grau de suavidade arbitrário;
3. flexibilidade devido à ausência de malha;
4. interpolação possui caráter matemático não local, regularização;
5. possibilidade de acoplamento com elementos finitos;
6. possibilidade de enriquecimento extrínseco;
7. possibilidade de enriquecimento intrínseco;
8. formulação adequada à adaptatividade.

3 Análise fisicamente não linear via abordagem global-local

O procedimento de análise fisicamente não linear via GFEM global-local foi desenvolvido e implementado no INSANE por Monteiro [73]. Monteiro [73] adaptou a formulação proposta por Kim e Duarte [13], na qual cada bloco de análise global-local k é resolvido como descrito a seguir.

1. Resolução do problema global linear (inicial e estimado);
2. Resolução dos problemas locais não lineares com condições de contorno oriundas do problema global da etapa 1;
3. Resolução do problema global enriquecido com a solução do problema local final da etapa 2.

Neste trabalho, a formulação de Monteiro [73] foi modificada para comportar Métodos sem Malha no problema local, conforme descrito a seguir.

Tabela 1. Aplicação dos Métodos sem Malha

Trabalho	Propriedades	Classe de Problema	Métodos sem Malha
Tiago e Leitão [50]	2, 5, 8	MDC, materiais parcialmente frágeis	EFG
Barros [51]	2,3, 6	MDC, materiais parcialmente frágeis	EFG
Silva [52]	1, 2, 3, 5	MDC, materiais parcialmente frágeis	EFG
Gori [53]	4	MDC, materiais parcialmente frágeis, localização de deformações	NS-PIM e ES-PIM
Li et al. [56]	4	Localização de deformações, banda de cisalhamento	RKPM
Liu et al. [55]	3, 4, 8	Mecânica da fratura, grandes deformações, dano, hiperelaticidade, elastoviscoplasticidade	RKPM
Chen et al. [57]	4	Dano elástico, localização de deformações	RKPM
Chen et al. [58]	4	Localização de deformações, plasticidade, dano elástico	RKPM
Wang e Li [59]	4	Dano elástico	RKPM
Pérez Pozo et al. [60]	2, 4	Plasticidade	FPM
Askes et al. [61]	2, 4	Dano não-local	EFG
Rabczuk e Zi [62]	7	Trincas coesivas	XEFG
Zi et al. [63]	7	Trincas coesivas	XEFG
Rabczuk et al. [64]	3, 7	Análise geometricamente não-linear estruturas de concreto armado, trincas coesivas em 3D	XEFG
Rabczuk et al. [65]	7	Propagação de fissuras 3D	XEFG
Belytschko et al. [3]	3, 5	Propagação de fissuras	EFG + FEM
Hegen [4]	5	Mecânica da fratura	EFG + FEM
Rao e Rahman [5]	3, 5	Mecânica da fratura elástica linear, propagação de fissuras	EFG + FEM
Gu e Zhang [6]	5, 7, 8	Mecânica da fratura elástica linear	EFG + FEM
Yuan et al. [7]	3, 5, 8	Propagação de fissuras em geomateriais	RPIM + FEM
Duarte et al. [23]	2, 5, 6	Elasticidade, domínios curvos	<i>hp-Clouds</i> + GFEM

3.1 Formulação

Na formulação que se segue e no restante deste trabalho, k , i e j são empregados para designar o bloco global-local, o passo local e a iteração local, respectivamente. Cada bloco de análise global-local

k compreende as três etapas descritas a seguir.

Etapa 1. Problema global linear inicial e estimado

Primeiramente, para $k = 0$, é considerado o seguinte PVC elástico linear de domínio $\bar{\Omega}_G = \Omega_G \cup \partial\Omega_G$ em \mathbb{R}^n e contorno decomposto em $\partial\Omega_G = \partial\Omega_G^u \cup \partial\Omega_G^\sigma$, respectivamente os contornos de Dirichlet e Neumann do problema global:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad \text{em } \Omega_G, \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{em } \partial\Omega_G^u, \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{em } \partial\Omega_G^\sigma, \quad (4)$$

em que \mathbf{C} é o tensor constitutivo elástico, \mathbf{n} é o vetor unitário normal a $\partial\Omega_G^\sigma$ e $\bar{\mathbf{u}}$ e $\bar{\mathbf{t}}$ são os vetores de deslocamentos e de tensões prescritas, respectivamente.

O campo vetorial $\mathbf{u}_{G,0}^0$ é a solução aproximada da forma fraca do problema global inicial definido nas Equações (1), (2), (3) e (4). Neste trabalho, a solução é obtida via G/XFEM. O enunciado do problema aproximado na forma fraca é:

$$\text{Encontre } \mathbf{u}_{G,0}^0 \in \chi_G^0(\Omega_G) \subset \mathcal{H}^1(\Omega_G) \quad \forall \mathbf{v}_{G,0}^0 \in \chi_G^0(\Omega_G) \quad \text{tal que} \quad (5)$$

$$\int_{\Omega_G} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_{G,0}^0) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_{G,0}^0) d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega_G^u} \mathbf{u}_{G,0}^0 \cdot \mathbf{v}_{G,0}^0 ds = \int_{\partial\Omega_G^\sigma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v}_{G,0}^0 ds + \int_{\partial\Omega_G^u} \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v}_{G,0}^0 ds, \quad (6)$$

onde $\mathbf{v}_{G,0}^0$ são as funções teste, $\chi_G^0(\Omega_G)$ é a discretização de $\mathcal{H}^1(\Omega_G)$, um espaço de Hilbert de ordem 1 definido em Ω_G , construído pelas funções de forma do método empregado.

A solução $\mathbf{u}_{G,0}^0$ é obtida para a totalidade do carregamento (Fator de Carga $\lambda = 1$). Após a obtenção da solução, $\mathbf{u}_{G,0}^0$ é ajustado em função do passo de deslocamento P_{DG} pré-definido para o problema global em um nó de controlo adotado. Desta forma, é obtido o fator de carga λ^0 definido como:

$$\lambda^0 = \frac{P_{DG}}{u_{G,0,DC}^0} \quad (7)$$

onde $u_{G,0,DC}^0$ é uma componente de deslocamento do nó de controle adotado.

Para valores de $k \geq 1$, a solução $\mathbf{u}_{G,0}^k$ é estimada por meio da seguinte expressão:

$$\mathbf{u}_{G,0}^k = \frac{(k+1)}{k} \mathbf{u}_{G,0}^{k-1} \quad (8)$$

Etapa 2. Problema local não linear

Um PVC é resolvido de forma incremental-iterativa no domínio local Ω_L , que contém as nuvens em que ocorrem os fenômenos locais de interesse. Neste trabalho, o EFG é empregado no problema local. Desta forma, são empregados na resolução por meio do método Newton-Raphson os recursos implementados no INSANE por Silva [52].

Este problema tem condições de contorno oriundas da *solução global inicial* $\mathbf{u}_{G,0}^k$ da etapa anterior. O enunciado do problema é:

$$\text{Encontre } \mathbf{u}_L^k \in \chi_L(\Omega_L) \subset \mathcal{H}^1(\Omega_L) \quad \forall \mathbf{v}_L^k \in \chi_L(\Omega_L) \quad \text{tal que} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_L} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_L^k) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_L^k) d\mathbf{x} + \eta \int_{\partial\Omega_L \cap \partial\Omega_G^u} \mathbf{u}_L^k \cdot \mathbf{v}_L^k ds + \kappa \int_{\partial\Omega_L \setminus (\partial\Omega_L \cap \partial\Omega_G)} \mathbf{u}_L^k \cdot \mathbf{v}_L^k ds = \\ \int_{\partial\Omega_L \cap \partial\Omega_G^\sigma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v}_L^k ds + \eta \int_{\partial\Omega_L \cap \partial\Omega_G^u} \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v}_L^k ds + \\ \int_{\partial\Omega_L \setminus (\partial\Omega_L \cap \partial\Omega_G)} (\mathbf{t}(\mathbf{u}_{G,0}^k) + \kappa(\mathbf{u}_{G,0}^k)) \cdot \mathbf{v}_L^k ds, \end{aligned} \quad (10)$$

onde η é o parâmetro de penalidade, κ é o parâmetro de rigidez de Cauchy e χ_L é a discretização de $\mathcal{H}^1(\Omega_L)$ com as funções de forma do método empregado, neste caso o EFG é empregado na discretização o domínio local.

Etapa 3. Problema global linear enriquecido

Na Etapa 3 é considerado o seguinte PVC de domínio idêntico ao definido na Etapa 1:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad \text{em } \Omega_G, \quad (11)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^s : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (12)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{em } \partial\Omega_G^u, \quad (13)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{em } \partial\Omega_G^\sigma, \quad (14)$$

em que \mathbf{C}^s é o tensor constitutivo secante obtido considerando a danificação ocorrida no problema local.

A aproximação construída com base na PU pode ser aprimorada por meio de estratégias reunidas sob a denominação de enriquecimento intrínseco ou extrínseco. O G/XFEM têm a aproximação enriquecida de forma extrínseca. O emprego de uma base extrínseca adicional tem por objetivo o aumento da consistência da aproximação ou melhora da aproximação com a inclusão de funções que contemplem aspectos da solução do PVC conhecidos *a priori* [10]. Nesta estratégia, famílias de funções podem ser incluídas na aproximação multiplicando-as pelas funções de PU. O resultado deste produto é uma função que herda a continuidade da função original e as características aproximatórias das funções produto. Este resultado somente é possível graças as propriedades da função original caso seja uma PU. Sendo assim, a função de forma associada ao nó \mathbf{x}_j é construída pela multiplicação da PU, $\phi_j(\mathbf{x})$, por uma função de enriquecimento, $L_{ji}(\mathbf{x})$.

$$\varphi_j(\mathbf{x}) = \phi_j(\mathbf{x})L_{ji}(\mathbf{x}) \quad (15)$$

As funções $L_{ji}(\mathbf{x})$ podem pertencer a uma base de funções I_j definidas como

$$I_j = \{L_{ji}(\mathbf{x})\}_{i=1}^{q_j} \quad (16)$$

onde $L_{ji}(\mathbf{x})$ corresponde à “i-ésima” função que multiplica a PU do nó \mathbf{x}_j , podendo ser polinomial ou não, e q_j representa o número de funções $L_{ji}(\mathbf{x})$ utilizadas.

A aproximação nos métodos que utilizam a estratégia de enriquecimento extrínseco apresenta a seguinte representação geral:

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \phi_j(\mathbf{x}) \left\{ u_j + \sum_{i=1}^{q_j} L_{ji}(\mathbf{x})b_{ji} \right\} \quad (17)$$

Nesta etapa, a solução do problema local \mathbf{u}_L^k (Eq. (10)) é utilizada como base extrínseca de enriquecimento do problema global. No caso da abordagem global-local, a Eq. (15) é reescrita conforme mostrado a seguir:

$$\varphi_j(\mathbf{x}) = \phi_j(\mathbf{x})\mathbf{u}_L^k \quad (18)$$

onde ϕ_j é a função PU empregada no problema global inicial e \mathbf{u}_L^k é a solução do problema local, chamada agora de função de enriquecimento global-local.

O enunciado do problema global enriquecido é:

$$\text{Encontre } \mathbf{u}_G^k \in \chi_G^k(\Omega_G) \subset \mathcal{H}^1(\Omega_G) \quad \forall \quad \mathbf{v}_G^k \in \chi_G^k(\Omega_G) \quad \text{tal que} \quad (19)$$

$$\int_{\Omega_G} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_G^k) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_G^k) d\mathbf{x} + \eta \int_{\partial\Omega_G^u} \mathbf{u}_G^k \cdot \mathbf{v}_G^k ds = \int_{\partial\Omega_G^\sigma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v}_G^k ds + \int_{\partial\Omega_G^u} \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v}_G^k ds, \quad (20)$$

onde $\chi_G^k(\Omega_G)$ é a discretização de $\mathcal{H}^1(\Omega_G)$, um espaço de Hilbert de ordem 1 definido em Ω_G , construído pelas funções de forma do método empregado. Nesta etapa, qualquer método que suporta o enriquecimento extrínseco pode ser utilizado. A aproximação $\mathbf{u}_G^k(\mathbf{x})$ é dada pela Eq. (17), onde $L_{ji}(\mathbf{x})$ contém o enriquecimento utilizado no problema global inicial e a solução do problema local.

A solução \mathbf{u}_G^k é obtida para a totalidade do carregamento (Fator de Carga $\lambda = 1$). Após a obtenção da solução, \mathbf{u}_G^k é ajustado em função do passo de deslocamento P_{DG} pré-definido para o problema global. Desta forma, é obtido o fator de carga λ_E^k definido como:

$$\lambda_E^k = \frac{(k+1)P_{DG}}{u_{G,DC}^k} \quad (21)$$

onde $u_{G,DC}^k$ é uma componente de deslocamento do nó de controle.

O ponto de coordenadas $\lambda_E^k u_G^k$ e λ_E^k é o ponto correspondente ao bloco de análise global-local k na trajetória de equilíbrio do problema.

3.2 Parâmetros da análise global-local não linear

Na análise não linear é necessário definir parâmetros como tamanho dos passos de carga, número máximo de passos, número máximo de iterações, entre outros. Na análise global-local não linear realizada neste trabalho, é necessário definir os seguintes parâmetros:

- Passo global de descolamento - P_{DG} ;
- Número de blocos de análise global-local (passos globais);
- Número de passos locais adicionados a cada bloco de análise global-local - P_{LA} ;
- Número máximo de iterações locais (para cada passo);

Na Etapa 2 de cada bloco de análise global-local é necessário resolver o problema desde o início do carregamento, até o nível de carga do bloco. Desta forma, para que se represente adequadamente o problema, é necessário que em cada bloco global-local aumente-se a quantidade de passos locais resolvidos. Desta forma, o número de passos locais resolvidos em cada bloco k é dado por:

$$N_{PL} = (k+1)P_{LA} \quad (22)$$

4 Exemplo Numérico

Nesta Seção são apresentadas simulações numéricas de um painel em L composto de concreto com a utilização da biblioteca de modelos constitutivos disponível no INSANE [74], com a abordagem global-local via Métodos sem Malha proposta. Para testar os recursos implementados e avaliar sua performance na análise fisicamente não linear de meios parcialmente frágeis, os resultados numéricos oriundos desta abordagem são comparados com resultados experimentais disponíveis na literatura e com resultados de análises que utilizam o G/XFEM nos problemas locais (GFEM-gl).

A Fig. 1 apresenta a geometria, o carregamento e as condições de contorno do problema analisado. Considera-se $q = 28N/mm$ e espessura do painel de $100 mm$.

No problema global, o ponto A na Fig. 1 é o ponto cujo deslocamento vertical é considerado na composição das trajetórias de equilíbrio (no problema global). As condições de contorno essenciais são

impostas diretamente ao longo dos nós do seguimento BC da Fig. 1. Todos os graus de liberdade são bloqueados ao longo deste seguimento. No problema global, o material é elástico linear com $E_0 = 25850 \text{ N/mm}^2$ e $\nu = 0,18$.

Adicionalmente, é considerado no problema local modelo de fissuração distribuída de direção fixa com as leis tensão-deformação de Carreira e Chu [75, 76] e estado plano de tensão. As propriedades do material são $E_0 = 25850 \text{ N/mm}^2$, $\nu = 0,18$, $f_t = 2,70 \text{ N/mm}^2$, $f_c = 31,0 \text{ N/mm}^2$, $\epsilon_t = 0,0001925$ e $\epsilon_c = 0,0022$. A análise não-linear do problema local é realizada com controle de deslocamentos [77], aproximação secante do tensor constitutivo e uma tolerância relativa para a convergência em termos de deslocamento de 0,005. O deslocamento vertical do ponto D da Fig. 1 é o grau de liberdade de controle. São empregados nos modelos locais do EFG parâmetro de penalidade $\eta = 10^{13}$ e 6×6 pontos de Gauss por célula.

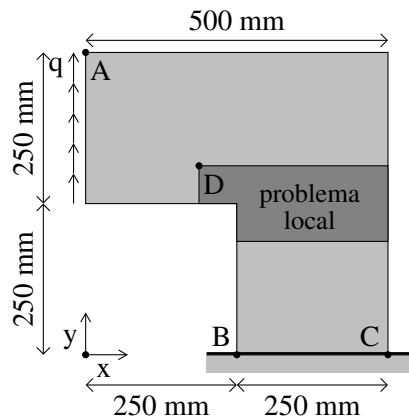


Figura 1. Geometria do painel em L de concreto

A malha global empregada, apresentada na Fig. 2(a), possui 48 elementos e 134 nós. O modelo local com EFG é apresentado na Fig. 2(b).

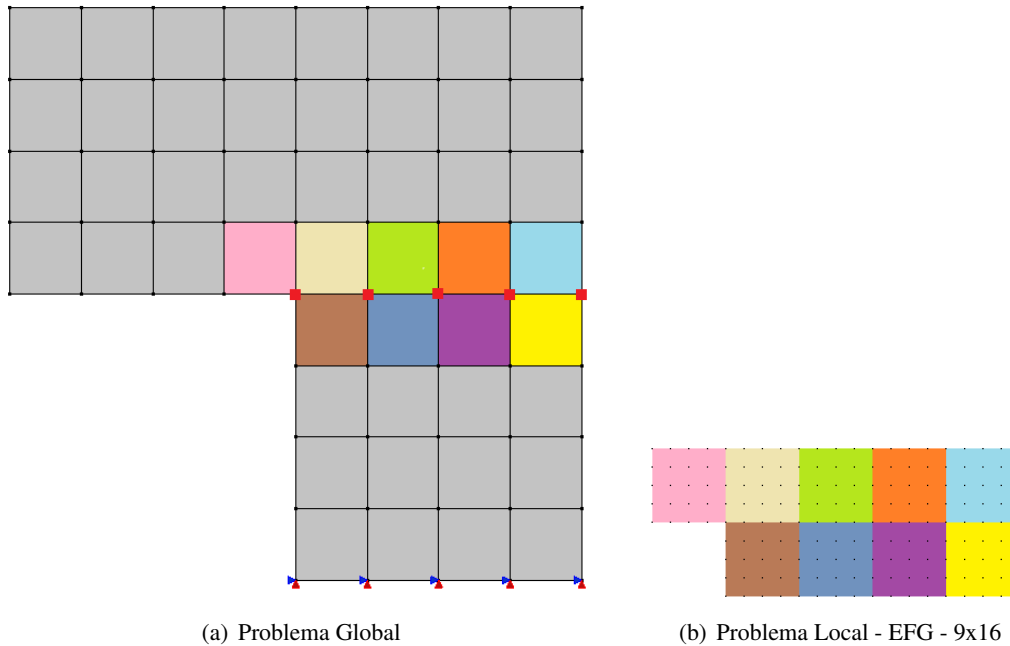


Figura 2. Problemas global e local

São empregados neste exemplo domínios de influência quadrados com funções peso do tipo *Cubic Spline*. Como nos modelos utilizados os nós são uniformemente distribuídos, o domínio de influência

de cada nó é definido em função do valor d correspondente à medida do lado da célula de integração quadrada. Com o objetivo de estudar o efeito do tamanho dos domínios de influência dos problemas locais são realizados testes variando o tamanho do domínio de influência dos nós.

Desta forma, para as análises com o problema local apresentado na Fig. 2(b), são realizados testes considerando quatro tamanhos de domínio de influência. São usados domínios de influência quadrados de lado ϵ igual a: $2d$; $3d$; $4d$; $5d$. Os diferentes tamanhos de domínios são apresentados na Fig. 3. Os testes são feitos com passo global de deslocamento de $0,02 \text{ mm}$ e 30 passos locais adicionados a cada bloco de análise global-local.

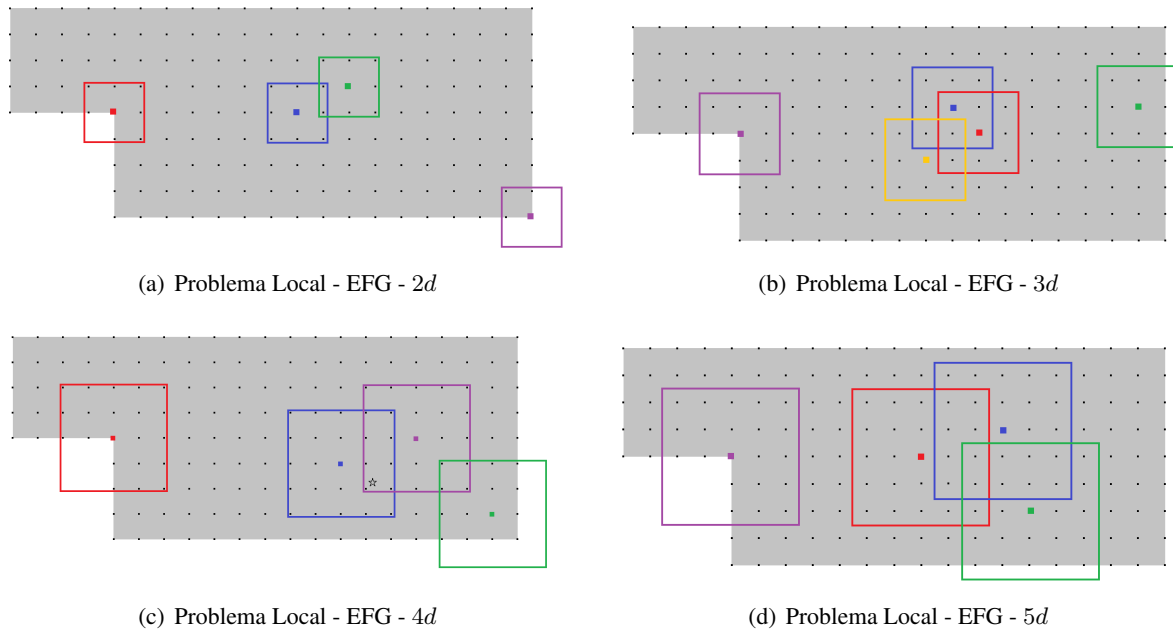


Figura 3. Domínios de influência

Com o objetivo de avaliar o comportamento da trajetória de equilíbrio do problema global enriquecido, são apresentados os resultados de análises realizadas com o MEF em todo o domínio do painel. É empregada neste modelo, apresentado na Fig. 4, nível de discretização semelhante ao empregado no problema local da Fig. 2(b).

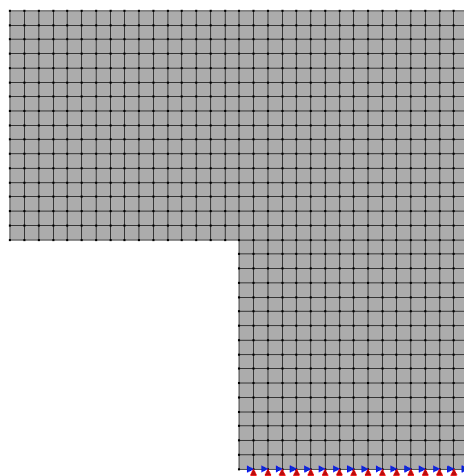


Figura 4. 768 elementos/ células

As trajetórias de equilíbrio das análises com os diversos domínios de influência, bem como da análise do modelo da Fig. 4, são apresentadas nos gráficos da Fig. 5, juntamente com os experimentais

de Winkler et al. [78].

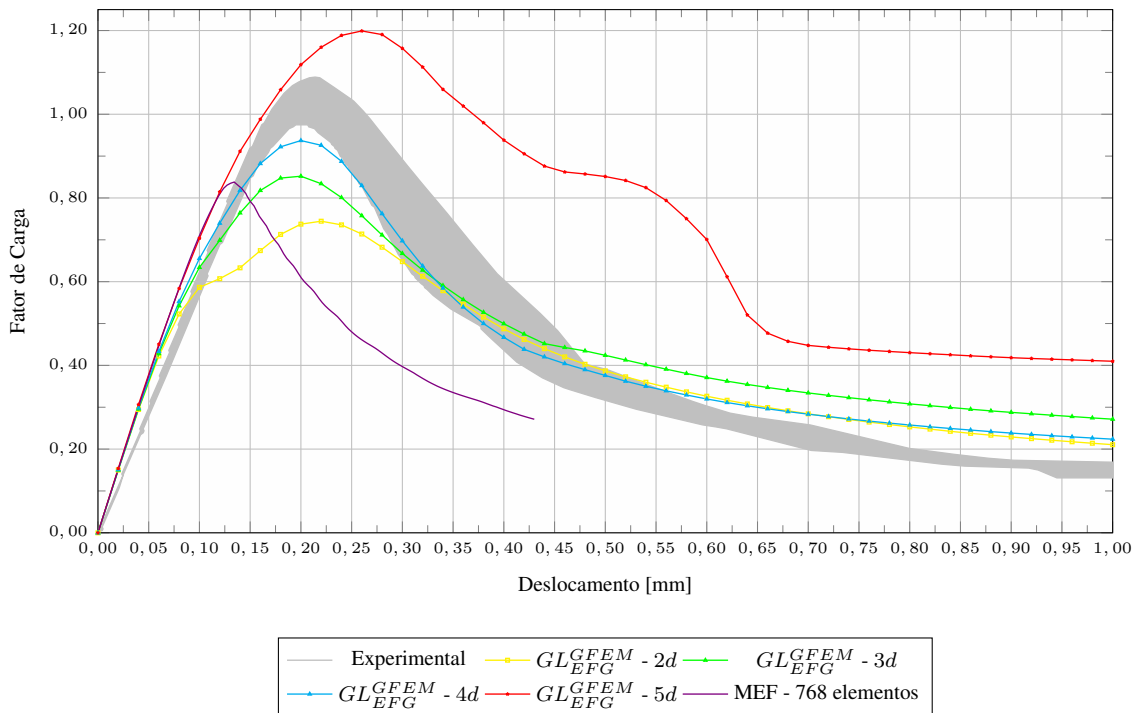


Figura 5. Domínios de influência

A partir das trajetórias de equilíbrio apresentadas observa-se que a malha da Fig. 4, com mesmo nível discretização do problema local empregado na análises via abordagem global-local, apresenta trajetória de equilíbrio distante dos resultados experimentais e com indicação tendência de localização das deformações, vinculada ao grau de refinamento. Tendência essa não observada na análise global-local com o Método sem Malha.

Ainda, é possível observar que o tamanho dos domínios de influência tem bastante impacto sobre a trajetória de equilíbrio, principalmente sobre o valor de carga máxima encontrado e sobre o comportamento pós-crítico (ramo de amolecimento). Desta maneira, observa-se para os casos testados que a medida em que se aumenta o tamanho do domínio de influência, mais rígido é o comportamento (maior é o limite de carga atingido e maior a inclinação da trajetória no ramo ascendente). Estes resultados são coerentes com os resultados encontrados por Silva [52] na análise não linear com EFG.

5 Considerações finais

Este trabalho empregou a abordagem global-local com EFG no problema local na análise fisicamente não linear. Foram utilizados os recursos implementados no INSANE de versões adaptadas/expandidas dos trabalhos de Alves [1] e Monteiro [73], respectivamente. A utilidade do emprego do EFG nos modelos locais foi evidenciada na análise fisicamente não linear de meios parcialmente frágeis por meio da obtenção de trajetórias de equilíbrio coerentes com os resultados experimentais, sendo que a possibilidade de aumento do domínio de influência dos nós, o que resulta em maior domínio de suporte para os pontos de integração, constitui uma das vantagens do uso do EFG no problema local.

Agradecimentos

Os autores agradecem o importante apoio das agências brasileiras de apoio à pesquisa CNPq (“Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico”, projeto 308932/2016-1) e FAPEMIG (“Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais”, projeto APQ-01656-18).

Referências

- [1] Alves, P. D., 2012. Estratégia global-local aplicada ao método dos elementos finitos generalizados. Master's thesis, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- [2] Duarte, C. A., 1995. A review of some meshless methods to solve partial differential equations. Technical report, TICAM, The University of Texas at Austin. Technical Report 06.
- [3] Belytschko, T., Organ, D., & Krongauz, Y., 1995. A coupled finite element-element-free Galerkin method. *Computational Mechanics*, vol. 17, n. 3, pp. 186–195.
- [4] Hegen, D., 1996. Element-free Galerkin methods in combination with finite element approaches. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 135, n. 1-2, pp. 143–166.
- [5] Rao, B. & Rahman, S., 2001. A coupled meshless-finite element method for fracture analysis of cracks. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, vol. 78, n. 9, pp. 647–657.
- [6] Gu, Y. T. & Zhang, L. C., 2008. Coupling of the meshfree and finite element methods for determination of the crack tip fields. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 75, n. 5, pp. 986–1004.
- [7] Yuan, H., Peng, C., Lin, Q., & Zhang, B., 2014. Simulation of tensile cracking in earth structures with an adaptive RPIM-FEM coupled method. *KSCCE Journal of Civil Engineering*, vol. 18, n. 7, pp. 2007–2018.
- [8] Liu, G.-R. & Gu, Y., 2000. Meshless local petrov–galerkin (mlpg) method in combination with finite element and boundary element approaches. *Computational Mechanics*, vol. 26, n. 6, pp. 536–546.
- [9] Duarte, C. A. & Babuška, I. M., 2005. A global-local approach for the construction of enrichment functions for the generalized FEM and its application to propagating three-dimensional cracks. Technical report, ECCOMAS Thematic Conference on Meshless Methods. Technical Report 06.
- [10] Fries, T. P. & Matthias, H. G., 2004. Classification and overview of meshfree methods. *Department of Mathematics and Computer Science, Technical Univ. of Braunschweig*, pp. 64.
- [11] Duarte, C. A. & Kim, D.-J., 2008. Analysis and applications of a generalized finite element method with global-local enrichment functions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 197, n. 6-8, pp. 487–504.
- [12] Gupta, V., Kim, D.-J., & Duarte, C. A., 2012. Analysis and improvements of global–local enrichments for the generalized finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 245, pp. 47–62.
- [13] Kim, J. & Duarte, C. A., 2015. A new generalized finite element method for two-scale simulations of propagating cohesive fractures in 3-D. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 104, n. 13, pp. 1139–1172. nme.4954.
- [14] Li, H. & Duarte, C., 2018. A two-scale generalized finite element method for parallel simulations of spot welds in large structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 337, pp. 28 – 65.
- [15] Malekan, M., Barros, F. B., & Pitangueira, R. L., 2018. Fracture analysis in plane structures with the two-scale g/xfem method. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 155, pp. 65 – 80.
- [16] Li, H., OHara, P., & Duarte, C., 2019. A two-scale generalized fem for the evaluation of stress intensity factors at spot welds subjected to thermomechanical loads. *Engineering Fracture Mechanics*.
- [17] Belytschko, T., Lu, Y. Y., & Gu, L., 1994. Element-free Galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 37, n. 2, pp. 229–256.

- [18] Fonseca, F. T., 2008. Sistema computacional para análise dinâmica geometricamente não linear através do método dos elementos finitos. Master's thesis, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- [19] Duflot, M. & Nguyen-Dang, H., 2004. A meshless method with enriched weight functions for fatigue crack growth. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 59, n. 14, pp. 1945–1961.
- [20] Kumar, V., 2013. Modeling ductile fracture using a simplified meshfree method. *Computational Materials Science*, vol. 67, pp. 296–302.
- [21] Rabczuk, T. & Eibl, J., 2006. Modelling dynamic failure of concrete with meshfree methods. *International Journal of Impact Engineering*, vol. 32, n. 11, pp. 1878–1897.
- [22] Bordas, S., Rabczuk, T., & Zi, G., 2008. Three-dimensional crack initiation, propagation, branching and junction in non-linear materials by an extended meshfree method without asymptotic enrichment. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 75, n. 5, pp. 943–960.
- [23] Duarte, C., Migliano, D., & Baker, E., 2005. A technique to combine meshfree-and finite element-based partition of unity approximations. Technical report, Department of Civil and Environmental Engineering, University of Illinois at Urbana-Champaign.
- [24] Monaghan, J. J., 1982. Why particle methods work. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, vol. 3, pp. 422–433.
- [25] Monaghan, J. J., 1994. Simulating free surface flows with SPH. *Journal of Computational Physics*, vol. 110, pp. 399–406.
- [26] Nayroles, B., Touzot, G., & Villon, P., 1992. Generalizing the finite element method: Diffuse approximation and diffuse elements. *Computational Mechanics*, vol. 10, pp. 307–318.
- [27] Oñate, E., Idelsohn, S., & Zienkiewicz, O. C., 1995. Finite point methods in computational mechanics. Technical report, CIMNE. Report 67.
- [28] Oñate, E., Idelsohn, S., Zienkiewicz, O. C., & Taylor, R. L., 1996a. A finite point method in computational mechanics. applications to convective transport and fluid flow. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 39, pp. 3839–3866.
- [29] Oñate, E., Idelsohn, S., Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., & Sacco, C., 1996b. A stabilized finite point method for analysis of fluid mechanics problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 139, pp. 315–346.
- [30] Duarte, C. A., 1996. *The hp-cloud method*. Phd thesis, The University of Texas at Austin.
- [31] Duarte, C. A. & Oden, J. T., 1995. Hp Clouds - a Meshless Method to solve boundary-value problem. Technical report, TICAM, The University of Texas at Austin.
- [32] Duarte, C. A. & Oden, J. T., 1996a. An h-p adaptive method using cloud. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 139, pp. 237–262.
- [33] Duarte, C. A. & Oden, J. T., 1996b. H-p clouds - an h-p meshless method. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, vol. 12, n. 6, pp. 673–705.
- [34] Melenk, J. M., 1995. *On Generalized Finite Element Methods*. PhD thesis, University of Maryland, College Park.
- [35] Melenk, J. M. & Babuška, I., 1996. The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 39, pp. 289–314.

- [36] Babuška, I. & Melenk, J. M., 1997. The partition of unity method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 40, n. 4, pp. 727–758.
- [37] Liu, W. K., Jun, S., Li, S., Adee, J., & Belytschko, T., 1995a. Reproducing kernel particles methods for structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 8, pp. 1655–1679.
- [38] Liu, W. K., Jun, S., & Zhang, F. Y., 1995b. Reproducing kernel particle methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 20, pp. 1081–1106.
- [39] Atluri, S. N. & Zhu, T., 1998. A new meshless local petrov-galerkin (MLPG) approach in computational mechanics. *Computational Mechanics*, vol. 22, n. 2, pp. 117–127.
- [40] Amaratuga, K. & Williams, J. R., 1997. Wavelet-Galerkin solution of boundary value problems. *Archives of Computational Methods in Engineering*, vol. 4, n. 3, pp. 243–285.
- [41] Liu, G. R. & Gu, Y. T., 2001a. A local radial point interpolation method (LRPIM) for free vibration analyses of 2-d solids. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 246, n. 1, pp. 29 – 46.
- [42] Liu, G. R. & Gu, Y. T., 2001b. A point interpolation method for two-dimensional solids. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 50, n. 4, pp. 937–951.
- [43] Wang, J. & Liu, G., 2002. A point interpolation meshless method based on radial basis functions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 54, n. 11, pp. 1623–1648.
- [44] Zhang, G. Y., Liu, G. R., Wang, Y. Y., Huang, H. T., Zhong, Z. H., Li, G. Y., & Han, X., 2007. A linearly conforming point interpolation method (LC-PIM) for three-dimensional elasticity problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 72, n. 13, pp. 1524–1543.
- [45] Liu, G. R. & Zhang, G. Y., 2008. Edge-based smoothed point interpolation methods. *International Journal of Computational Methods*, vol. 05, n. 04, pp. 621–646.
- [46] Liu, G. R. & Zhang, G. Y., 2009. A normed G space and weakened weak (W2) formulation of a cell-based smoothed point interpolation method. *International Journal of Computational Methods*, vol. 06, n. 01, pp. 147–179.
- [47] Belytschko, T., Krongauz, Y., Organ, D., Fleming, M., & Krysl, P., 1996. Meshless methods: an overview and recent developments. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 139, n. 1, pp. 3–47.
- [48] Daxini, S. & Prajapati, J., 2014. A review on recent contribution of meshfree methods to structure and fracture mechanics applications. *The Scientific World Journal*, vol. 2014.
- [49] Rabczuk, T. & Belytschko, T., 2006. Application of particle methods to static fracture of reinforced concrete structures. *International Journal of Fracture*, vol. 137, n. 1-4, pp. 19–49.
- [50] Tiago, C. M. & Leitão, V. M., 2004. Development of a efg formulation for damage analysis of reinforced concrete beams. *Computers Structures*, vol. 82, n. 17, pp. 1503 – 1511. Computational Mechanics in Portugal.
- [51] Barros, F. B., 2002. *Métodos sem Malha e Método dos Elementos Finitos Generalizados em Análise Não-Linear de Estruturas*. PhD thesis, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil.
- [52] Silva, R. P., 2012. *Análise Não-Linear de Estruturas de Concreto por meio do Método Element Free Galerkin*. PhD thesis, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- [53] Gori, L., 2018. *Failure analysis of quasi-brittle media using the micropolar continuum theory, elastic-degradation constitutive models, and smoothed point interpolation methods*. Tese de doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.

- [54] Cosserat, E., Cosserat, F., et al., 1909. *Théorie des corps déformables*. A. Hermann et fils.
- [55] Liu, W. K., Hao, S., Belytschko, T., Li, S., & Chang, C. T., 1999. Multiple scale meshfree methods for damage fracture and localization. *Computational Materials Science*, vol. 16, n. 1, pp. 197 – 205.
- [56] Li, S., Hao, W., & Liu, W. K., 2000. Mesh-free simulations of shear banding in large deformation. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 37, n. 48, pp. 7185 – 7206.
- [57] Chen, J.-S., Zhang, X., & Belytschko, T., 2004. An implicit gradient model by a reproducing kernel strain regularization in strain localization problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 193, n. 27, pp. 2827 – 2844. Computational Failure Mechanics for Geomaterials.
- [58] Chen, J.-S., Wu, C.-T., & Belytschko, T., 2000. Regularization of material instabilities by mesh-free approximations with intrinsic length scales. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 47, n. 7, pp. 1303–1322.
- [59] Wang, D. & Li, Z., 2013. A two-level strain smoothing regularized meshfree approach with stabilized conforming nodal integration for elastic damage analysis. *International Journal of Damage Mechanics*, vol. 22, n. 3, pp. 440–459.
- [60] Pérez Pozo, L., Campos, A., Lascano, S., Oller, S., & Rodríguez-Ferran, A., 2014. A finite points method approach for strain localization using the gradient plasticity formulation. *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2014.
- [61] Askes, H., Bennett, T., & Kulasegaram, S., 2007. Meshless discretisation of nonlocal damage theories. *Solid Mechanics and its Applications*, vol. 5, pp. 3–20.
- [62] Rabczuk, T. & Zi, G., 2007. A meshfree method based on the local partition of unity for cohesive cracks. *Computational Mechanics*, vol. 39, n. 6, pp. 743–760.
- [63] Zi, G., Rabczuk, T., & Wall, W., 2007. Extended meshfree methods without branch enrichment for cohesive cracks. *Computational Mechanics*, vol. 40, n. 2, pp. 367–382.
- [64] Rabczuk, T., Zi, G., Bordas, S., & Nguyen-Xuan, H., 2008. A geometrically non-linear three-dimensional cohesive crack method for reinforced concrete structures. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 75, n. 16, pp. 4740–4758.
- [65] Rabczuk, T., Bordas, S., & Zi, G., 2010. On three-dimensional modelling of crack growth using partition of unity methods. *Computers and Structures*, vol. 88, n. 23-24, pp. 1391–1411.
- [66] Ghosh, A. & Chaudhuri, P., 2013. Computational modeling of fracture in concrete using a meshfree meso-macro-multiscale method. *Computational Materials Science*, vol. 69, pp. 204–215.
- [67] Chaudhuri, P., 2013. Multi-scale modeling of fracture in concrete composites. *Composites: Part B*, vol. 47, pp. 162–172.
- [68] Dong, Y., Wu, S., Xu, S. S., Zhang, Y., & Fang, S., 2010. Analysis of concrete fracture using a novel cohesive crack method. *Applied Mathematical Modelling*, vol. 34, n. 12, pp. 4219–4231.
- [69] Rabczuk, T. & Belytschko, T., 2004. Cracking particles: A simplified meshfree method for arbitrary evolving cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 61, n. 13, pp. 2316–2343.
- [70] Teixeira, M. R., 2012. *Uma Contribuição para a Modelagem Numérica da Heterogeneidade do Concreto com o Método de Galerkin Livre de Elementos*. PhD thesis, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, Brasil.
- [71] Spada, A., Giambanco, G., & Ribolla, E. L. M., 2015. A FE-Meshless Multiscale Approach for Masonry Materials. *Procedia Engineering*, vol. 109, n. January 2016, pp. 364–371.

- [72] Duarte, C. A., Kim, D. J., & Quaresma, D. M., 2006. Arbitrarily smooth generalized finite element approximations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 196, pp. 33 – 56.
- [73] Monteiro, A. B., 2019. *Análise não linear de Meios Parcialmente Frágeis via Análise Global-Local do Método dos Elementos Finitos Generalizados*. PhD thesis, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- [74] Penna, S. S., 2011. *Formulação multipotencial para modelos de degradação elástica: Unificação teórica, proposta de novo modelo, implementação computacional e modelagem de estruturas de concreto*. PhD thesis, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- [75] Carreira, D. J. & Chu, K. H., 1985. Stress-strain relationship for plain concrete in compression. *American Concrete Institute Journal*, vol. 82, pp. 797–804.
- [76] Carreira, D. J. & Chu, K. H., 1986. Stress-strain relationship for reinforced concrete in tension. *American Concrete Institute Journal*, vol. 83, pp. 21–28.
- [77] Batoz, J.-L. & Dhatt, G., 1979. Incremental displacement algorithms for nonlinear problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 14, n. 8, pp. 1262–1267.
- [78] Winkler, B., Hofstetter, G., & Lehar, H., 2004. Application of a constitutive model for concrete to the analysis of a precast segmental tunnel lining. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol. 28, n. 7-8, pp. 797–819.