



IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DE UM MODELO NUMÉRICO PARA SIMULAÇÃO DO PROCESSO DE FISSURAÇÃO EM MEIOS PARCIALMENTE FRÁGEIS

Leandro Lopes da Silva

Roque Luiz da Silva Pitangueira

Samuel Silva Penna

Felício Bruzzi Barros

eng.leandrolopes@yahoo.com.br, roque@dees.ufmg.br, spenna@dees.ufmg.br,

felicio@dees.ufmg.br

Departamento de Engenharia de Estruturas da Universidade Federal de Minas Gerais

Avenida Antônio Carlos 6627, Pampulha, CEP. 31270-901, Belo Horizonte, MG, Brasil

Resumo. *Este artigo apresenta a implementação computacional de um modelo numérico para simulação do processo de fissuração em meios bidimensionais parcialmente frágeis. A análise fisicamente não linear se inicia empregando-se o Método dos Elementos Finitos Padrão (MEF), com o qual se simula a degradação inicial do meio de forma distribuída por meio de modelos constitutivos que consideram que o meio, apesar de degradado, permanece contínuo. O estágio limiar de nucleação de fissuras é indicado pela singularidade do tensor acústico, característica que fornece a condição clássica de localização de deformações. A presença das trincas é simulada com método cinemático que incorpora as descontinuidades por meio de interpolações enriquecidas, com base no Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG), ao passo que a propagação destas trincas é também indicada pela singularidade do tensor acústico. As forças de coesão atuantes nos planos das trincas são simuladas ao se incorporar ao processo de enriquecimento um modelo constitutivo discreto, que consiste na relação entre tensões e deslocamentos no caminho da trinca e se baseia no conceito de fissura coesiva. Este modelo apresenta a vantagem da não necessidade de definição prévia da região de nucleação e do caminho da trinca ou de redefinição da malha durante o processamento. As implementações foram realizadas na plataforma INSANE (INteractive Structural ANalysis Environment).*

Palavras-chave: *Implementação Computacional, Processo de Fissuração, Degradação Distribuída, Nucleação e Propagação de Trincas, MEFG*

1 INTRODUÇÃO

Os materiais parcialmente frágeis são assim classificados por exibirem na relação tensão-deformação um endurecimento moderado antes do alcance da resistência à tração seguido de um ramo de amolecimento, caracterizado pelo decréscimo gradual das tensões (Karihaloo, 1995). No caso do concreto, este ramo é devido aos mecanismos de tenacidade na zona de processo de fratura, que, segundo Shah et al. (1995), referem-se à presença de microfissuras e aos obstáculos à propagação das trincas.

Visando simular o comportamento de estruturas de concreto considerando as diferentes fases de degradação, propôs-se um modelo numérico para análise do processo de fissuração em meios parcialmente frágeis, cujos detalhes da implementação computacional são abordados neste artigo. A partir dos conceitos das mecânicas do dano e da fratura, processa-se a análise em três estágios, a saber: degradação distribuída, nucleação de fissuras e propagação de trincas.

O fenômeno de degradação distribuída é simulado por meio de modelos constitutivos que consideram que o meio, apesar de degradado, permanece contínuo, mas que as propriedades do material em estudo se modificam nas regiões submetidas a esforços superiores a determinados parâmetros de resistência. Esta abordagem permite modelar a deterioração sem a consideração da existência de trincas discretas. A continuidade do processo de análise, no entanto, pode implicar num nível de degradação que justifique a introdução destas trincas.

Este estágio limiar é dito nucleação de fissuras e é avaliado por meio de uma medida de nucleação. Por ser desejável que tal medida seja comum a qualquer modelo constitutivo, ou seja, que esta medida seja independente de peculiaridades de um modelo constitutivo particular, definiu-se como medida de nucleação a singularidade do tensor acústico, uma medida que envolve as grandezas do modelo constitutivo adotado e que, conforme Klein e Gao (1998) e Jirásek (2007a), caracteriza a condição clássica de localização de deformações.

As trincas são consideradas no decorrer da análise por meio do Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) (Babuska et al., 1994; Duarte e Oden, 1995, 1996), um método numérico que permite o enriquecimento das funções de Partição da Unidade (PU) de modo que as descontinuidades passam a ser incorporadas nas interpolações, embutindo-se nos elementos os efeitos da presença das trincas nos campos de deslocamentos, de deformações e de tensões.

As forças de coesão atuantes nos planos das trincas são simuladas ao se incorporar ao processo de enriquecimento um modelo constitutivo discreto, que consiste na relação entre tensões e deslocamentos no caminho da trinca e se baseia no conceito de fissura coesiva, em particular no modelo de Hillerborg et al. (1976), no qual todas as deformações inelásticas, que ocorrem na zona de processo de fratura, são representadas em uma linha por meio das forças coesivas que agem na trinca.

Uma análise com as características descritas é dita análise fisicamente não linear, com a qual é possível simular o comportamento de estruturas de forma mais realista, porém, tal análise só é possível com o uso de recursos computacionais adequados.

O sistema computacional INSANE (*INteractive Structural ANalysis Environment*), um projeto de software livre, implementado em linguagem Java segundo o paradigma de Programação Orientada a Objetos, dispõe de diversos recursos para análise fisicamente não linear e pôde ser aperfeiçoado para o modelo numérico proposto, por ser um ambiente computacional segmentado, amigável a mudanças e escalável em complexidade.

Este artigo está organizado em 5 seções. Na seção 2, apresenta-se o processo de fissuração segundo abordagens das Mecânicas da Fratura e do Dano Contínuo. A partir destas abordagens, apresentam-se os métodos numéricos que compõem o modelo proposto para simulação deste processo. Na seção 3, apresenta-se a lógica computacional do modelo, implementada no sistema INSANE. Na seção 4, apresenta-se simulação numérica para ilustrar o modelo numérico implementado. Finalmente, na seção 5, são apresentadas as considerações finais.

2 PROCESSO DE FISSURAÇÃO

Segundo Jirásek (2001), a formação de uma fissura é um processo transitório de formação e coalescência de microfissuras dentro da estrutura material. No estudo da Mecânica da Fratura, divide-se este processo em três estágios, apresentados na Fig. 1 segundo a descrição do comportamento cinemático da região da fissuração.

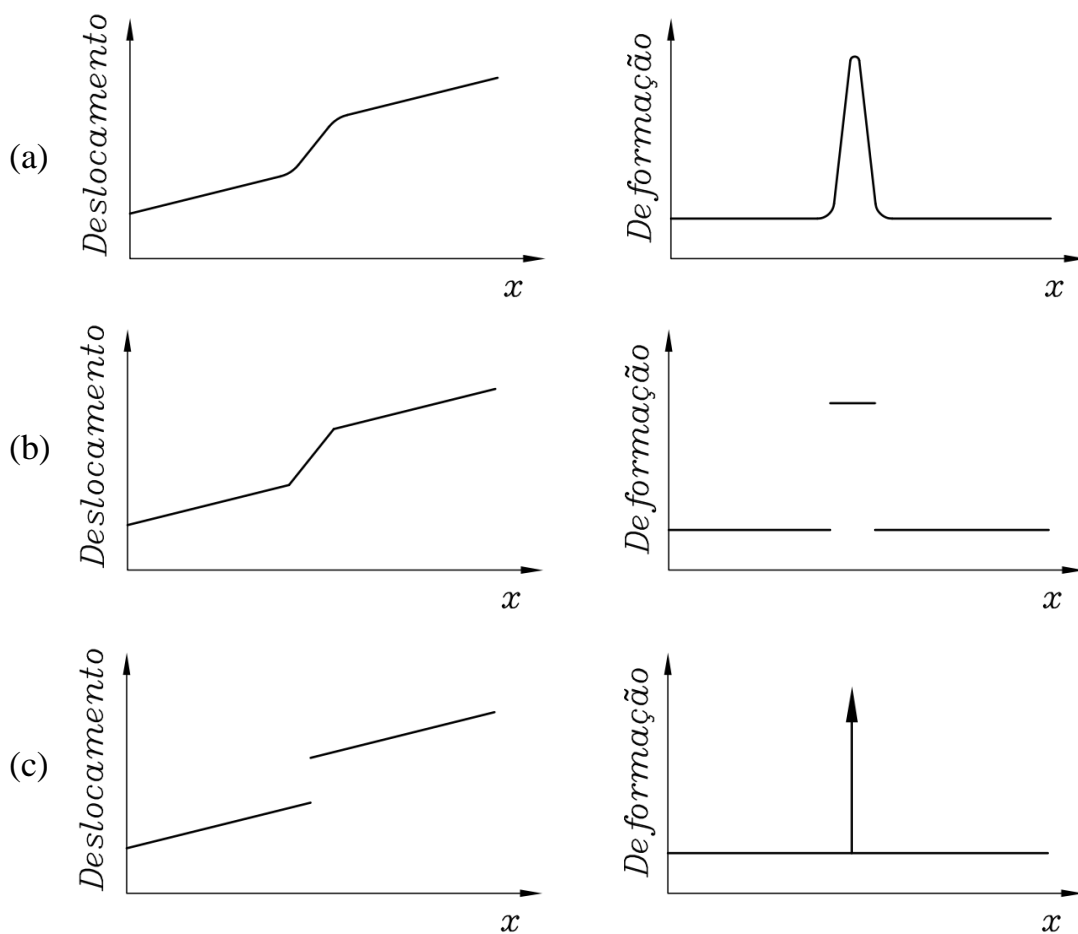


Figura 1: Descrição cinemática da zona de fissuração (Jirásek, 2001).

Na Fig. 1a, tem-se o estágio denominado Falha Difusa. Neste estágio, os campos de deslocamentos e de deformações ainda são contínuos. A localização de deformações é manifestada por meio de uma alta concentração de deformações em uma banda estreita, com uma transição contínua a partir das deformações mais baixas na região adjacente à banda. Em termos físicos, esta representação corresponde a uma zona de processo de fratura com uma alta concentração de defeitos próximos ao seu centro.

Na Fig. 1b, tem-se o estágio denominado Descontinuidade Fraca. Neste estágio, a evolução do processo leva à formação de uma região de localização de deformações representada por uma banda de tamanho pequeno, mas finita, separada do restante do corpo por duas descontinuidades fracas, ou seja, por saltos no campo de deformações. Observa-se que, apesar da mudança brusca de inclinação, o campo de deslocamentos permanece contínuo. Em termos físicos, a banda entre as descontinuidades fracas corresponde a uma zona de processo de fratura com uma densidade de microfissuras quase constante.

Na Fig. 1c, tem-se o estágio denominado Descontinuidade Forte. Neste estágio, ocorre o colapso da banda de localização de deformações, incorporando-se uma descontinuidade forte, ou seja, um salto no campo de deslocamentos. Consequentemente, o campo de deformações é formado por uma parte regular, obtida pela diferenciação padrão do campo de deslocamentos, e outra parte singular, na qual o campo de deformações torna-se infinito. Em termos físicos, descontinuidade forte corresponde a uma microfissura com as faces muito fechadas.

No modelo proposto, empregam-se modelos constitutivos que tratam a degradação de forma distribuída para simulação do estágio inicial de degradação e para investigação do estágio de localização de deformações, a partir do tensor acústico, e o MEEG para simulação do estágio de incorporação de descontinuidades fortes.

2.1 Estágio de degradação distribuída

Para simulação do estágio de degradação distribuída, empregam-se modelos constitutivos que consideram que o meio, apesar de degradado, permanece contínuo, mas que as propriedades do material em estudo se modificam nas regiões submetidas a esforços superiores a determinados parâmetros de resistência. Vários são os modelos constitutivos propostos segundo esta abordagem, aplicáveis a materiais parcialmente frágeis. Neste contexto, destacam-se os modelos de fissuras distribuídas e os modelos de dano.

Segundo Rots (1988), os modelos de fissuras distribuídas consideram que a região fissurada é formada por um conjunto de pequenas fissuras paralelas entre si. Para tanto, representam esta região por meio de um conjunto de elementos finitos com comportamento ortotrópico. Conforme Pitangueira (1998), um elemento finito ortotrópico é definido posicionando-se o sistema local do seu tensor constitutivo no sistema definido pelas direções perpendicular e paralela ao plano de fissuração e adotando-se valores diferentes para os módulos de elasticidade destas direções. Desta forma, a rigidez dos elementos da região fissurada representa uma degradação gradual, o que permite que os efeitos da fissuração sejam reproduzidos numericamente sem a necessidade de modificações na geometria ou na discretização do modelo.

Conforme Pituba (1998), os modelos de dano admitem que a perda progressiva de rigidez do material é devida ao processo de microfissuração. Estes modelos são classificados como escalares ou anisotrópicos em função da variável representativa de dano ser, respectivamente, de natureza escalar ou tensorial. Nos modelos de dano, definem-se as variáveis de dano e suas dependências com os tensores constitutivo e de flexibilidade secantes no sentido de representar a danificação. Segundo Carol et al. (2001), conceitos como tensão e deformação efetivas, equivalência de deformações, de tensões e de energia, são usados para estabelecer os sentidos físicos dos modelos de degradação do material que são as bases das relações secantes com as variáveis de dano. Dentre as diversas propostas para a evolução do dano, destacam-se as funções escalares de evolução e as superfícies limites de dano. As funções de evolução são definidas

em termos de variáveis capazes de medir o estado de tensão e/ou de deformação do material, computando-se assim o estado de degradação. Dentre estas variáveis, destaca-se a medida de deformação equivalente definida segundo o modelo de dano. Em alternativa, com o domínio elástico do material delimitado por uma superfície, escrita em termos de parâmetros físicos do meio e de medidas de tensão e/ou de deformação, o valor do dano pode ser obtido por meio de algoritmos de retorno em termos de variáveis de dano.

No sistema INSANE, Penna (2011) desenvolveu um arcabouço teórico e computacional para modelos constitutivos. Vários modelos clássicos para tratar a degradação do meio material foram abordados no contexto desta estrutura e implementados neste arcabouço, com destaque para diversos modelos de dano e os modelos de fissuras distribuídas.

2.2 Nucleação de fissuras

Conforme Fig. 1, a formação de uma fissura é um processo transitório que pode, para fins de estudo, ser dividido em três estágios: Falha Difusa, Descontinuidade Fraca e Descontinuidade Forte. No estágio de Descontinuidade Fraca, tem-se a formação de uma região de localização de deformações delimitada por duas descontinuidades fracas. Este estágio antecede o estágio de Descontinuidade Forte, no qual a região de localização de deformações colapsa e forma uma trinca discreta. Desta forma, o fenômeno de localização de deformações pode ser investigado para caracterizar o estágio limiar de nucleação de fissuras. Segundo Klein e Gao (1998), de fato, este fenômeno pode ser avaliado para indicar o surgimento de trincas. Desta forma, define-se uma medida capaz de identificar este fenômeno, denominada medida de nucleação de fissuras. Para tanto, conforme Jirásek (2007a), parte-se da análise de um ponto \mathbf{x}_d da superfície S_d da descontinuidade no início da perda de continuidade do campo de deformações. Esta superfície divide o corpo nos subdomínios V^+ e V^- e tem a sua direção caracterizada por um vetor normal unitário \mathbf{n} orientado para V^+ , conforme ilustrado na Fig. 2.

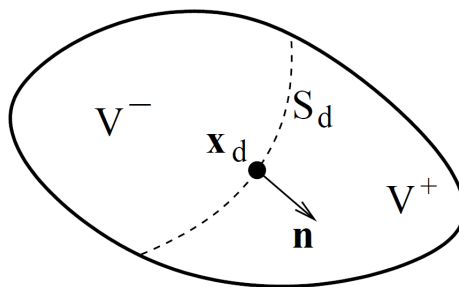


Figura 2: Corpo cortado por uma descontinuidade (Jirásek, 2007a).

Se o ponto \mathbf{x}_d é abordado segundo os subdomínios V^+ e V^- , aqueles campos que são descontínuos através de S_d tendem a valores diferentes em cada um destes lados. Segundo Jirásek (2007a), ainda que as taxas de tensão e de deformação sejam descontínuas através de S_d , os correspondentes saltos não são completamente arbitrários. O salto na taxa de tensão $[[\dot{\boldsymbol{\sigma}}]]$ é restrito pela condição de continuidade de tensão, ao passo que o salto na taxa de deformação $[[\dot{\boldsymbol{\epsilon}}]]$ é restrito pela condição de continuidade de deslocamento. Se estes tensores são decompostos em seus componentes no plano e fora do plano (com respeito ao plano tangente à superfície da descontinuidade), a condição de continuidade de tensão significa que as taxas de tensão fora do plano devem ser contínuas, ao passo que a condição de continuidade de deslocamento implica que as taxas de deformação no plano devem ser contínuas, conforme ilustrado na Fig. 3.

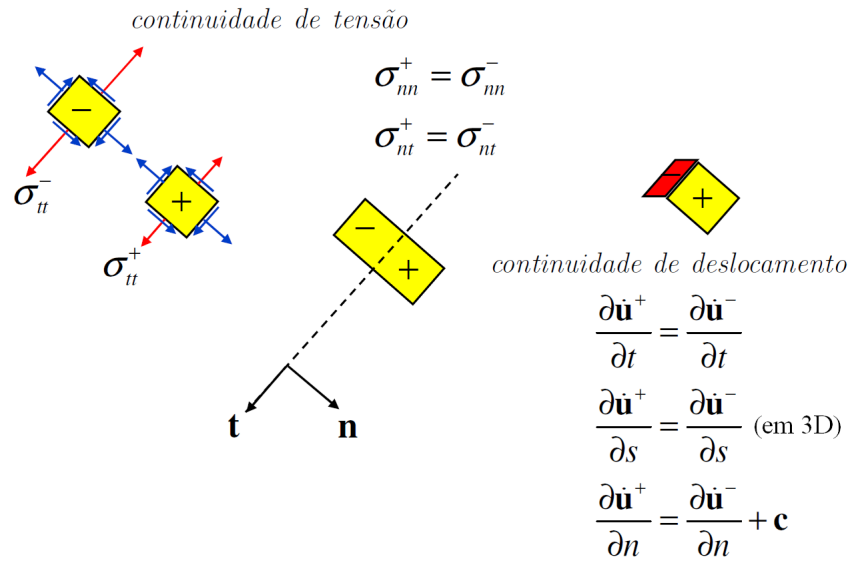


Figura 3: Condições de continuidade de tensão e de deslocamento (Jirásek, 2007b).

Segundo Jirásek (2001), as taxas de deformação no plano tangente à superfície da descontinuidade devem ser contínuas, pois, no estágio de Descontinuidade Fraca, o campo de deslocamentos permanece contínuo. A partir da Fig. 3, as condições de continuidade de tensão e de deslocamento podem ser escritas, respectivamente, como

$$\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}}^+ = \mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}}^- \quad (1)$$

$$\left(\frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{x}} \right)^+ = \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{x}} \right)^- + \mathbf{c} \otimes \frac{\partial n}{\partial \mathbf{x}} = \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{x}} \right)^- + \mathbf{c} \otimes \mathbf{n} \quad (2)$$

em que \mathbf{c} é um tensor de primeira ordem arbitrário.

Em teoria de pequenas deformações, com as deformações definidas como a parte simétrica do gradiente de deslocamento, Eq. (2) é facilmente reescrita em termos das taxas de deformação

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^+ = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^- + (\mathbf{c} \otimes \mathbf{n})_{sim} \quad (3)$$

Em seguida, relacionam-se as taxas de tensão e de deformação por meio da lei constitutiva. A lei tensão-deformação na forma de taxa é normalmente escrita como

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (4)$$

em que \mathbf{D} é o tensor constitutivo tangente de quarta ordem.

Substituindo-se a Eq. (4) na condição de continuidade de tensão, Eq. (1), e valendo-se da condição de continuidade de deslocamento, Eq. (3), obtém-se

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^- + \overbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} : (\mathbf{c} \otimes \mathbf{n})}_{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{c}}_{sim} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^- \quad (5)$$

ou

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{0} \quad (6)$$

Para atribuir ao tensor \mathbf{c} um significado físico mais específico, Jirásek (2007a) o apresenta sob a forma

$$\mathbf{c} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{m} \quad (7)$$

em que:

$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \|\mathbf{c}\|$ é a magnitude do termo salto na Eq. (2);

$\mathbf{m} = \mathbf{c} / \|\mathbf{c}\|$ é um tensor de primeira ordem unitário denominado vetor de polarização.

O ângulo entre os vetores unitários \mathbf{m} e \mathbf{n} caracteriza o modo de falha, que vai desde a divisão por tração (modo I), com $\mathbf{m} = \mathbf{n}$, até o deslizamento por cisalhamento (modo II), com \mathbf{m} perpendicular ao \mathbf{n} . A partir das Eqs. (6) e (7), escreve-se

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}) \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{m} = \mathbf{0} \quad (8)$$

Uma vez que uma descontinuidade verdadeira é obtida somente se $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \neq 0$, tem-se

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{m} = \mathbf{0} \quad (9)$$

Conforme Jirásek (2007a), a partir da Eq. (9), conclui-se que, na formação inicial de uma descontinuidade fraca, o tensor de segunda ordem

$$\mathbf{Q} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \quad (10)$$

é singular e o vetor de polarização \mathbf{m} é o autovetor deste tensor associado ao autovalor zero. Esta característica fornece a condição clássica de localização de deformações, dada por

$$\det \mathbf{Q} = 0 \quad (11)$$

O tensor \mathbf{Q} é denominado tensor de localização, por vezes referido como tensor acústico. Segundo Klein e Gao (1998) e Jirásek (2007a), do ponto de vista matemático, a singularidade do tensor acústico indica a chamada perda de elipticidade da equação diferencial governante.

O tensor acústico definido na Eq. (10) depende do tensor de rigidez tangente \mathbf{D} e do vetor normal unitário \mathbf{n} da superfície da descontinuidade. Sob certas exceções, a rigidez tangente pode ser considerada como dependente somente do estado corrente do material e, portanto, conhecida. O vetor \mathbf{n} , no entanto, não é conhecido de antemão. Portanto, a análise de localização consiste na busca por um vetor unitário \mathbf{n} para o qual o tensor acústico se torne singular. Se tal vetor não existir, o campo de deformações deve permanecer contínuo. A singularidade do tensor acústico para um determinado vetor \mathbf{n} indica que um salto no campo de deformações pode se desenvolver através de uma superfície com normal \mathbf{n} .

2.3 Incorporação de descontinuidades fortes

Para a simulação do estágio de incorporação de descontinuidades fortes, emprega-se o MEFG. Proposto de forma independente por Babuska et al. (1994) e Duarte e Oden (1995, 1996), o MEFG pode ser entendido como uma variação do MEF. O emprego sob a denominação atual surgiu em Melenk (1995). A estratégia utilizada no MEFG consiste em empregar as funções do tipo Partição da Unidade (PU) que enriquecidas definem as funções de forma. Conforme Barros (2002) e Alves (2012), a escolha das funções de PU depende do tipo de problema a ser analisado, contudo, o emprego das funções convencionais do MEF como funções de PU, além de facilitar a aplicação do método, garante estabilidade ao problema analisado, ao verificar diretamente as condições de contorno. Para ilustrar a estratégia deste método, considera-se uma malha convencional de elementos finitos bidimensionais definida a partir de um conjunto de n pontos nodais $\{\mathbf{x}_j\}_{j=1}^n$, conforme apresentado na Fig. 4a. Define-se então a região ou nuvem ϖ_j formada por todos os elementos que concorrem no ponto nodal \mathbf{x}_j .

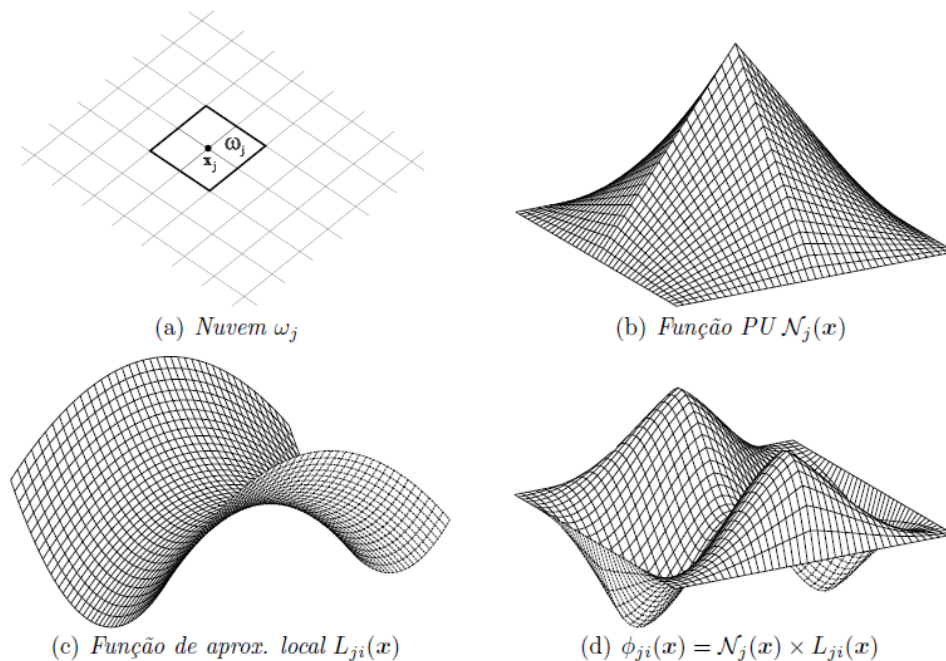


Figura 4: Estratégia de enriquecimento da nuvem ϖ_j (Barros, 2002).

O conjunto das funções interpoladoras associadas ao nó \mathbf{x}_j , obtidas por meio do MEF, define a função $N_j(\mathbf{x})$, cujo suporte corresponde à região ϖ_j , conforme Fig. 4b.

No MEF, a função $N_j(\mathbf{x})$, por si só, define a função de forma, porém, no MEEG, esta função é uma alternativa para compor a função de PU, que enriquecida define a função de forma. Um conjunto \mathcal{I}_j de funções de enriquecimento, denominadas funções de aproximação local (Fig. 4c), é composto por q_j funções linearmente independentes definidas para cada nó \mathbf{x}_j

$$\mathcal{I}_j \stackrel{def}{=} \{L_{j1}(\mathbf{x}), L_{j2}(\mathbf{x}), \dots, L_{jq_j}(\mathbf{x})\} = \{L_{ji}(\mathbf{x})\}_{i=1}^{q_j} \quad (12)$$

com $L_{j1}(\mathbf{x}) = 1$

Ao final do processo, a função de forma $\{\phi_{ji}\}_{i=1}^{q_j}$ do MEEG, atrelada ao nó \mathbf{x}_j , é construída por meio do enriquecimento da função de PU pelos componentes do conjunto \mathcal{I}_j , ou seja, $\{\phi_{ji}\}_{i=1}^{q_j}$ é facilmente obtida pelo produto das funções básicas que formam a PU, obtidas por meio do MEF, e as funções de enriquecimento

$$\{\phi_{ji}\}_{i=1}^{q_j} = N_j(\mathbf{x}) \times \{L_{ji}(\mathbf{x})\}_{i=1}^{q_j} \quad (13)$$

sem somatório em j .

Na Fig. 4d, ilustra-se um componente $\phi_{ji}(\mathbf{x})$ da função de forma $\{\phi_{ji}\}_{i=1}^{q_j}$. A partir desta estratégia, uma aproximação genérica do campo de deslocamentos $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ pode ser obtida por meio da combinação linear das funções de forma

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N N_j(\mathbf{x}) \left\{ \mathbf{u}_j + \sum_{i=2}^{q_j} L_{ji}(\mathbf{x}) \mathbf{b}_{ji} \right\} \quad (14)$$

em que:

\mathbf{u}_j é o grau de liberdade nodal convencional;

$\{\mathbf{b}_{ji}\}_{i=2}^{q_j}$ são os graus de liberdade nodal adicionais.

Esta estratégia pode ser utilizada para simulação do estágio de incorporação de descontinuidades fortes ao processo, tendo em vista que esta incorporação consiste em introduzir saltos no campo de deslocamentos, o que pode ser realizado construindo as funções de forma a partir de funções de enriquecimento do tipo degrau. Neste modelo, emprega-se a função degrau clássica de *Heaviside* $H(\xi)$, definida na forma (Mohammadi, 2008)

$$H(\xi) = \begin{cases} 1, & \forall \xi > 0 \\ 0, & \forall \xi < 0 \end{cases} \quad (15)$$

em que ξ é a posição em relação à descontinuidade, assumida em $\xi = 0$.

Desta forma, adotando-se a função de *Heaviside* como função de enriquecimento na Eq. (14), descreve-se o campo de deslocamentos decomposto em duas partes, uma contínua e uma descontínua (Mohammadi, 2008)

$$\tilde{\mathbf{u}}(x) = \sum_{j=1}^N N_j(\mathbf{x})\mathbf{u}_j + \sum_{j \in I_k} N_j(\mathbf{x})H(\xi)\mathbf{b}_j \quad (16)$$

em que:

I_k é o conjunto dos nós enriquecidos com função degrau;

\mathbf{b}_j é o parâmetro nodal adicional.

Logo, por meio desta lógica, têm-se embutidos os efeitos das discontinuidades nas interpolações enriquecidas dos elementos finitos que as contêm.

2.4 Coesão nos planos das trincas

Para simular as forças de coesão atuantes nos planos das trincas, incorpora-se ao processo de enriquecimento um modelo constitutivo discreto, que consiste na relação entre tensões e deslocamentos no caminho da trinca. Para tanto, conforme Wells e Sluys (2001), reescreve-se o campo de deslocamentos na forma matricial e obtém-se o campo de deformações por meio do cálculo de seu gradiente

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{a} + \mathbf{H}\mathbf{N}\mathbf{b} \quad (17)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{a} + \mathbf{H}\mathbf{B}\mathbf{b} + (\delta_{\Gamma_d}\mathbf{n})\mathbf{N}\mathbf{b} \quad (18)$$

em que:

\mathbf{N} é a matriz das funções de forma convencionais de MEF;

\mathbf{a} é o vetor dos graus de liberdade nodais convencionais;

\mathbf{b} é o vetor dos graus de liberdade nodais adicionais;

\mathbf{B} é matriz de aproximação das deformações;

δ_{Γ_d} é a função delta de *Dirac* centralizada na trinca;

\mathbf{n} é a matriz dos termos do vetor normal à trinca.

A função delta de *Dirac* aparece no campo de deformações devido ao salto imposto no campo de deslocamentos. O delta de *Dirac* é uma distribuição matemática que consiste em uma função $\delta(x)$ que vale zero para qualquer x , exceto para $x = 0$, em que tende ao infinito, de tal maneira que o valor total de sua integral é 1. Na sequência, considera-se a equação dos trabalhos virtuais, desprezando-se as forças de corpo

$$\int_{\Omega} \nabla^s \boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega = \int_{\Gamma_u} \boldsymbol{\eta} \cdot \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma \quad (19)$$

em que:

Ω é o volume do corpo;

Γ_u é o contorno do corpo submetido às forças externas;

$\boldsymbol{\eta}$ são as variações admissíveis de deslocamentos;

$\boldsymbol{\sigma}$ é o campo de tensões;

$\bar{\mathbf{t}}$ são as forças externas aplicadas em Γ_u .

Inserindo-se na Eq. (19) as Eqs. (17) e (18) escritas nas variações dos graus de liberdade (\mathbf{a}' e \mathbf{b}') e se valendo da propriedade de integração do delta de *Dirac*, tem-se

$$\mathbf{a}'^T \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega + \mathbf{b}'^T \int_{\Omega} H \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega + \mathbf{b}'^T \int_{\Gamma_d} \mathbf{N}^T \mathbf{t} \, d\Gamma = \mathbf{a}'^T \int_{\Gamma_u} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma + \mathbf{b}'^T \int_{\Gamma_u} H \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma \quad (20)$$

em que:

Γ_d é a superfície da trinca;

$\mathbf{t} = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})_{\Gamma_d}$ é a tensão coesiva atuante na trinca.

Valendo-se das relações constitutivas no domínio do contínuo e na descontinuidade, respectivamente,

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{D}(\mathbf{B} \dot{\mathbf{a}} + H \mathbf{B} \dot{\mathbf{b}}) \quad (21)$$

$$\dot{\mathbf{t}} = \mathbf{T}[\dot{\mathbf{u}}]_{\mathbf{x} \in \Gamma_d} = \mathbf{T} \mathbf{N} \dot{\mathbf{b}} \quad (22)$$

em que \mathbf{T} é a matriz de rigidez tangente da relação tensão coesiva \times abertura da trinca.

E separando-se, na Eq. (20), os termos relativos à \mathbf{a}' e \mathbf{b}' na forma de um sistema de equações, obtém-se

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, d\Omega & \int_{\Omega} H \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, d\Omega \\ \int_{\Omega} H \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, d\Omega & \int_{\Omega} H^2 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, d\Omega + \int_{\Gamma_d} \mathbf{N}^T \mathbf{T} \mathbf{N} \, d\Gamma \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \begin{Bmatrix} d\mathbf{a} \\ d\mathbf{b} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_a^{\text{ext}} \\ \mathbf{f}_b^{\text{ext}} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_a^{\text{int}} \\ \mathbf{f}_b^{\text{int}} \end{Bmatrix} \quad (23)$$

em que:

\mathbf{K} é a matriz de rigidez;

da e db são deslocamentos incrementais;

$\mathbf{f}_a^{\text{ext}}$ e $\mathbf{f}_b^{\text{ext}}$ compõem o vetor de forças equivalentes às forças externas e consistem, respectivamente, nos termos multiplicados por \mathbf{a}' e \mathbf{b}' no lado direito da Eq. (20);

$\mathbf{f}_a^{\text{int}}$ e $\mathbf{f}_b^{\text{int}}$ compõem o vetor de forças equivalentes às tensões internas e consistem, respectivamente, nos termos multiplicados por \mathbf{a}' e \mathbf{b}' no lado esquerdo da Eq. (20).

Logo, por meio do sistema incremental definido na Eq. (23), incorpora-se ao processo de enriquecimento um modelo constitutivo discreto, o que permite simular as forças de coesão atuantes nos planos das trincas. Na Eq. (23), a rigidez tangente \mathbf{D} é função do modelo constitutivo distribuído empregado na análise, ao passo que a rigidez tangente \mathbf{T} é função de uma lei coesiva. Neste modelo, emprega-se uma lei coesiva definida no sistema local da trinca, cujos componentes normal (t_n) e tangencial (t_s) são, conforme Wells e Sluys (2001)

$$t_n = f_t \exp\left(-\frac{f_t}{G_f} \kappa\right) \quad (24)$$

$$t_s = d_{\text{init}} \llbracket u \rrbracket_s \quad (25)$$

em que:

f_t é a resistência à tração do material;

G_f é a energia de fratura;

κ é a máxima abertura da trinca $\llbracket u \rrbracket_n$ alcançada na análise;

d_{init} é a rigidez inicial da trinca ao cisalhamento;

$\llbracket u \rrbracket_s$ é o deslizamento tangencial relativo das faces da trinca.

Tomando-se os diferenciais das Eqs. (24) e (25), obtém-se a rigidez tangente \mathbf{T}

$$\begin{Bmatrix} \dot{t}_n \\ \dot{t}_s \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{f_t^2}{G_f} \exp\left(-\frac{f_t}{G_f} \kappa\right) & 0 \\ 0 & d_{\text{init}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}} \begin{Bmatrix} \llbracket \dot{u} \rrbracket_n \\ \llbracket \dot{u} \rrbracket_s \end{Bmatrix} \quad (26)$$

Observa-se que o modelo proposto é mais adequado para abertura de trinca em modo I predominante.

A rigidez tangente T é empregada quando a trinca experimenta carregamento. No caso de descarregamento, o comportamento é simulado por meio da rigidez secante, obtida ao se dividir os componentes da lei coesiva, Eqs. (24) e (25), pelas correspondentes variáveis. Uma trinca pode ainda se apresentar completamente fechada. Neste caso, emprega-se uma rigidez suficientemente alta na direção normal à trinca para evitar a interpenetração de suas superfícies.

3 LÓGICA COMPUTACIONAL

Nesta seção, apresenta-se a lógica implementada no núcleo numérico do sistema INSANE para modelagem $2D$ do processo de fissuração, detalhada em Silva (2016).

No modelo proposto, a verificação do fenômeno de nucleação, bem como da propagação de trincas, somente é realizada em um sistema equilibrado, ou seja, na convergência de um passo da análise.

Observa-se que se permite a nucleação de mais de uma trinca na análise. Por esta razão, estabeleceu-se uma medida comum para nucleação de fissuras e para propagação das trincas, que consiste na singularidade do tensor acústico, discutida na subseção 2.2. Medidas diferentes poderiam resultar na nucleação de uma trinca em um elemento, no qual se deveria ter a propagação de uma trinca já existente. Por esta mesma razão, primeiro se verifica a propagação das trincas existentes e, posteriormente, a nucleação de fissuras.

Na análise, os segmentos da trinca são inseridos como linhas retas de aresta a aresta do elemento. Conforme Wolff (2010), uma vez que, no contexto teórico de fissura coesiva, a energia total de fratura é dissipada com a separação entre as superfícies da fissura e não com a criação destas superfícies, o resultado numérico do método aqui descrito não é particularmente sensível a quando exatamente uma trinca é estendida, ou mesmo ao valor do comprimento desta extensão.

Na convergência de um passo da análise, verifica-se a propagação de trinca por trinca do modelo, bem como o fenômeno de nucleação em elemento por elemento da malha, com exceção daqueles já cortados por uma ou mais trincas. Ressalta-se que é facultada ao usuário a restrição da análise a uma única trinca.

Em função do tamanho do passo da análise não linear e do refinamento da malha, é possível que o sistema equilibrado resulte na introdução de uma trinca em uma fila de elementos simultaneamente, ao invés de em somente um elemento. Desta forma, o elemento em que se identifica o fenômeno de nucleação pode na verdade fazer parte de uma fila de elementos nucleados, não sendo o único no qual a trinca deverá ser introduzida neste instante. Desta forma, se inicia pela busca desta fila de elementos nucleados, da qual se assume como o elemento inicial aquele que apresentar a maior deformação principal. Esta lógica evita que a análise seja dependente do primeiro elemento identificado pertencente a uma fila de elementos nucleados.

Nos elementos identificados na nucleação, bem como naqueles que indicam propagação, introduz-se segmentos da trinca. Para tanto, constrói-se o segmento determinando sua direção, dispondo pontos de integração ao longo de seu comprimento para armazenamento dos parâmetros do modelo constitutivo discreto, discutido na subseção 2.4, e determinando e enriquecendo os nós do elemento necessários para sua simulação, conforme subseção 2.3.

Na Fig. 5, apresenta-se o fluxograma do processo de nucleação e propagação de trincas implementado.

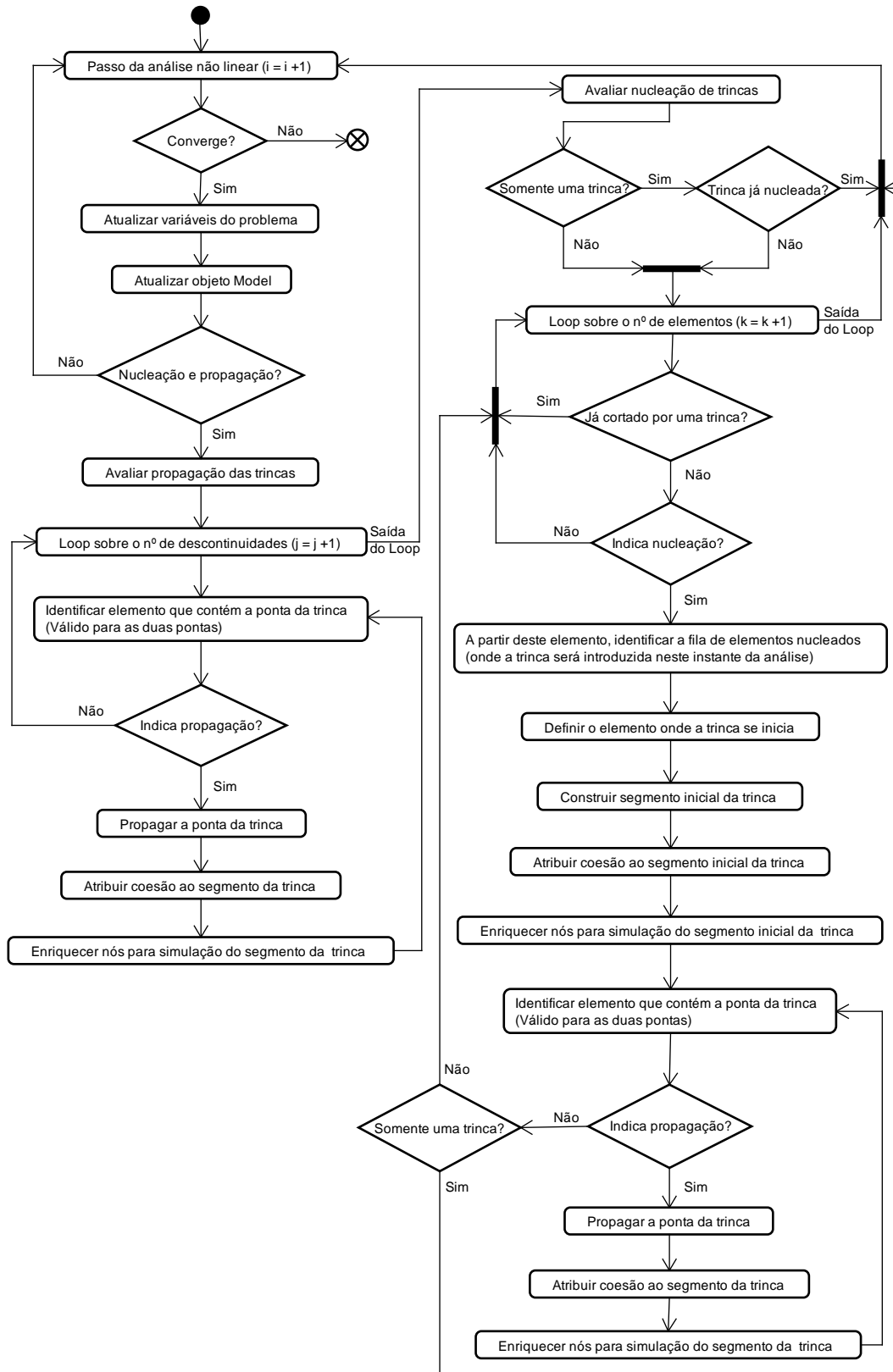


Figura 5: Fluxograma do processo de nucleação e propagação de trincas.

4 SIMULAÇÃO NUMÉRICA

O ensaio de compressão diametral, cuja configuração é apresentada na Fig. 6, é aqui modelado em estado plano de tensão, adotando-se malha de elementos finitos triangulares de três nós $T3$. Primeiramente, restringiu-se a análise a uma única trinca.

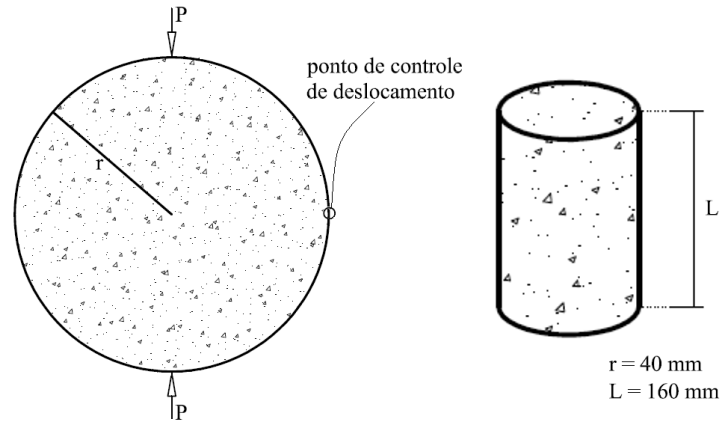


Figura 6: Compressão diametral: Configuração (Penna, 2011).

Nesta análise, adotou-se o modelo constitutivo de fissuras distribuídas com leis de Carreira e Chu (1985), para compressão, e Boone et al. (1986), para tração, cujos parâmetros do material são: $E_0 = 20000,0 \text{ N/mm}^2$, $\nu = 0,15$, $f_c = 25,0 \text{ N/mm}^2$, $f_t = 2,5 \text{ N/mm}^2$, $\varepsilon_c = 0,01$, $G_f = 0,1 \text{ N/mm}$, $h = 50 \text{ mm}$ e $\beta_r = 0,05$. Para solução do modelo, empregou-se o método de controle direto de deslocamento, incrementando-se de $0,000075 \text{ mm}$ o deslocamento horizontal do ponto de controle destacado na Fig. 6, com tolerância para convergência de 1×10^{-3} e carga de referência $P = 0,5 \text{ N}$. Nas Figs. 7 e 8, apresentam-se, respectivamente, a deformada com fator de escala igual a 250 e a tensão normal horizontal σ_{xx} ao longo do domínio, para os passos 71 (37,1 kN), 72 (37,3 kN), 82 (19,1 kN) e 300 (22,9 kN).

Na sequência, repetiu-se a análise, permitindo-se múltiplas trincas. É evidente que qualquer distinção entre os resultados ocorre nos passos posteriores à nucleação, ou seja, os resultados obtidos até o passo 71 (37,1 kN) são os mesmos em ambas as análises. Na Fig. 9, compara-se as trajetórias de equilíbrio do deslocamento vertical do nó sob a carga. Observa-se o prolongamento da análise com uma única trinca, o que efetivamente distingue as respostas obtidas.

Conforme em Penna (2011), a resistência da peça pode ser calculada pela equação da resistência nominal do ensaio de compressão diametral (Planas et al., 1999), dada por

$$\sigma_r = \frac{2P_{max}}{\pi D_{ef} L} \quad (27)$$

em que:

σ_r é a resistência à compressão diametral;

P_{max} é a carga máxima;

D_{ef} é o diâmetro efetivo;

L é o comprimento do corpo de prova.

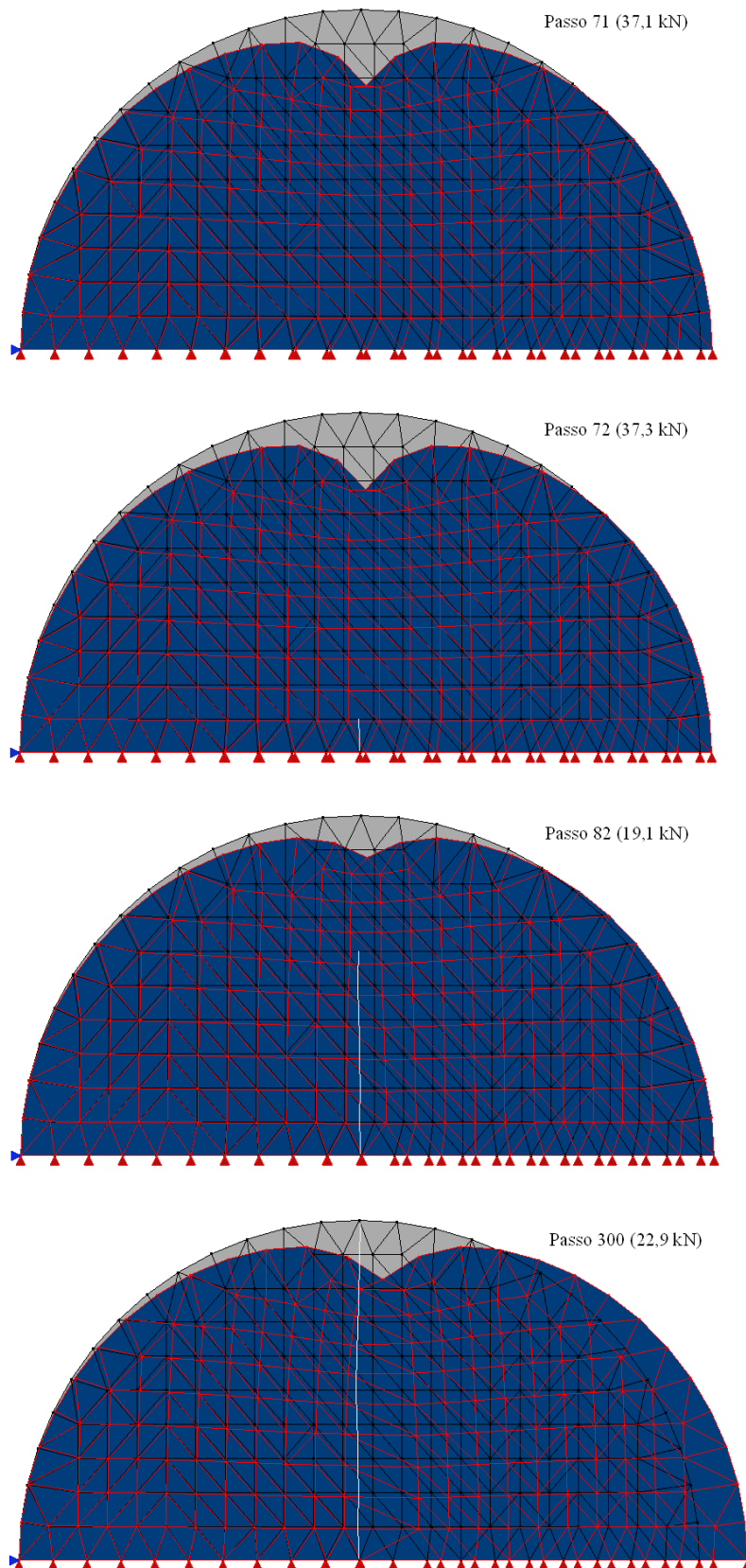


Figura 7: Compressão diametral: Deformada.

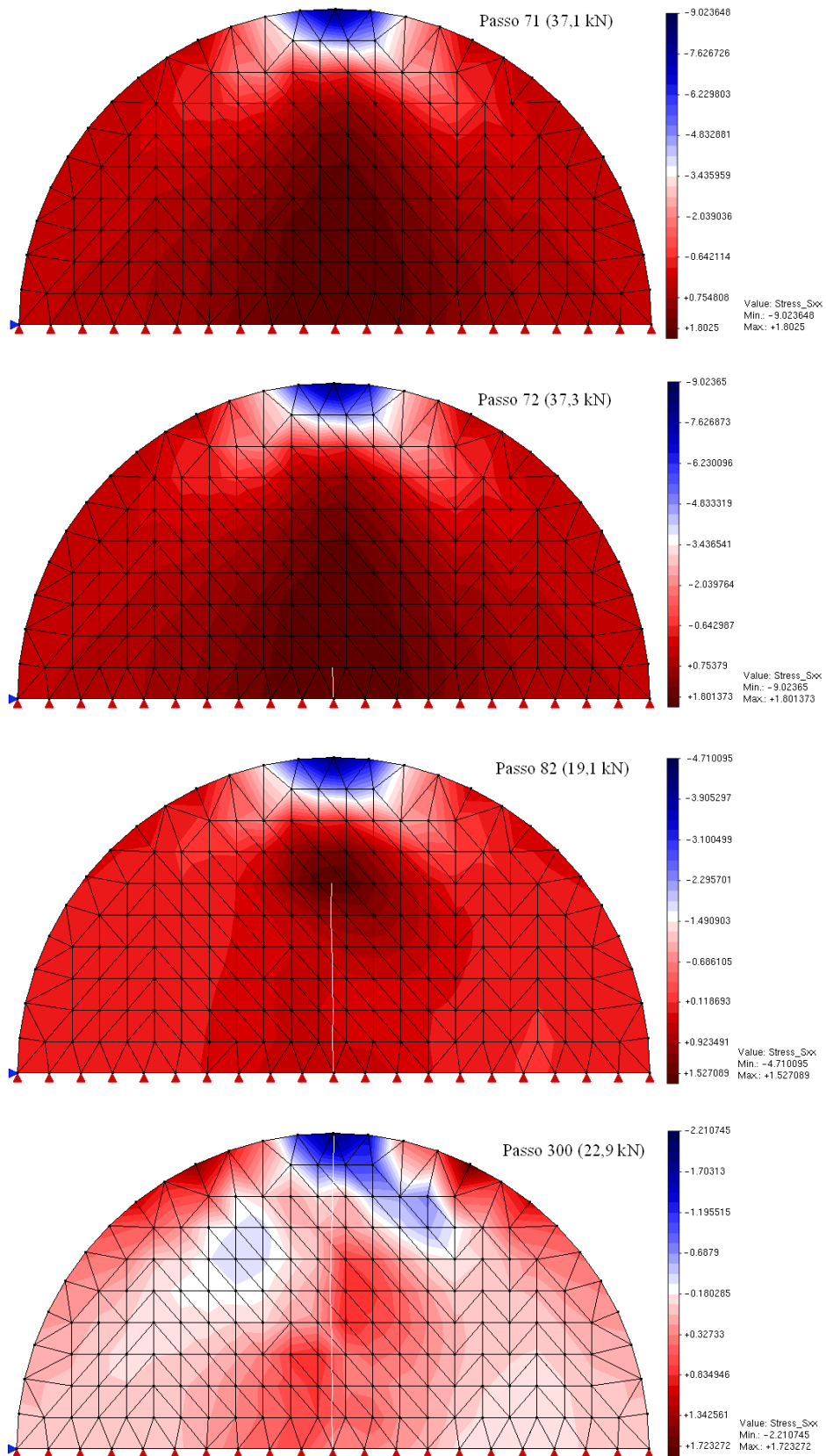


Figura 8: Compressão diametral: Tensão σ_{xx} .

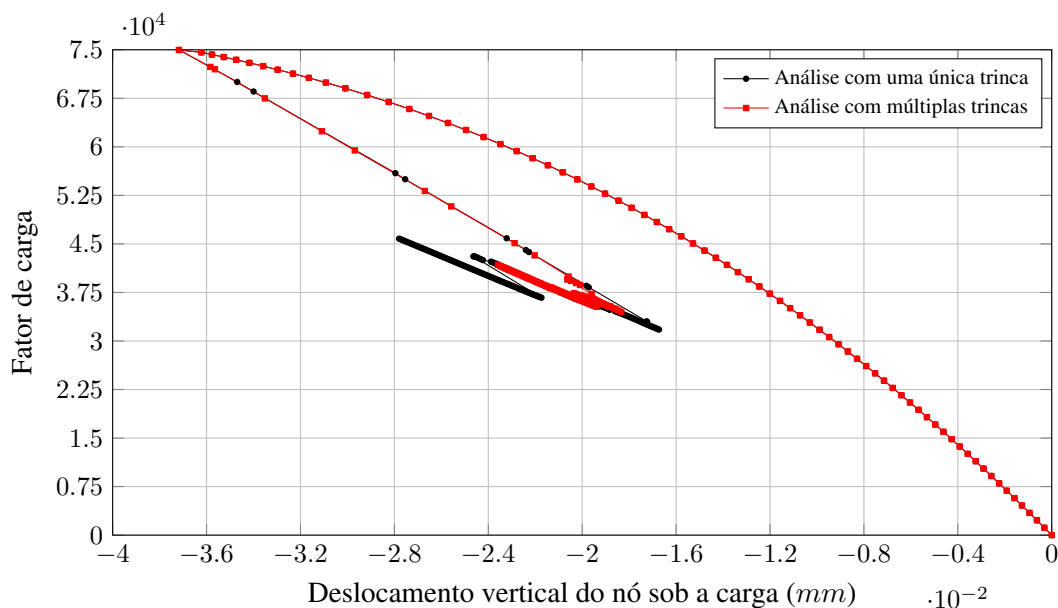


Figura 9: Compressão diametral: Trajetória de equilíbrio do deslocamento vertical do nó sob a carga.

Na Tabela 1, apresenta-se o valor da resistência à compressão diametral da peça, obtido a partir desta modelagem.

Tabela 1: Resistência à compressão diametral

D_{ef} (m)	Carga Max. (kN)	Resistência Nominal (kPa)
0,08	37,49	1864,60

Observa-se que os valores de carga máxima e resistência nominal, bem como o comportamento apresentado na Fig. 9, são consistentes com os obtidos por Penna (2011), onde se objetivou estudar a ductilidade estrutural a partir do ensaio de compressão diametral.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O modelo numérico implementado combina modelos de degradação distribuída com modelos baseados em funções interpoladoras com descontinuidades embutidas por meio do MEEG, bem como o MEEG com o modelo físico de fissura coesiva, a partir de leis tensão-abertura representativas das forças de coesão atuantes nos planos das trincas.

Tais combinações são monitoradas por uma medida de localização de deformações baseada na singularidade do tensor acústico. Por ser independente do modelo constitutivo distribuído adotado, esta medida de nucleação resguarda a generalidade do modelo.

Os recursos implementados permitem uma aproximação com boa precisão da resposta do processo de fissuração, com capacidade de modelar trincas discretas que atravessam a malha de forma independente de sua geometria e topologia. A geometria da trinca, formada por segmentos retos, permite a propagação de trincas curvas ou retilíneas.

Este modelo tem como principal vantagem a não necessidade de definição prévia da região de nucleação e do caminho da trinca ou de redefinição da malha durante o processamento.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o importante apoio das agências de pesquisa brasileiras CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) e FAPEMIG (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais).

REFERÊNCIAS

- Alves, P. D., 2012. Estratégia global-local aplicada ao método dos elementos finitos generalizados. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Babuska, I., Caloz, G. e Osborn, J. E., 1994. ‘Special finite element method for a classe of second order elliptic problems whith rough coefficients.’. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 36, pp. 3553–3576.
- Barros, F. B., 2002. Métodos Sem Malha e Métodos dos Elementos Finitos Generalizados em Análise Não-Linear de Estruturas. Tese de Doutorado, EESC - USP, São Carlos, SP, Brasil.
- Boone, T., Wawrzynek, P. A. e Ingraffea, A. R., 1986. ‘Simulation of the fracture process in rock with application to hydrofracturing’. *International Journal of Rock Mechanics and Minig Science*, vol. 23 (3), pp. 255–265.
- Carol, I., Rizzi, E. e Willam, K., 2001. ‘On the formulation of anisotropic elastic degradation. i. theory based on a pseudo-logarithmic damage tensor rate.’. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 38, pp. 491–518.
- Carreira, D. J. e Chu, K., 1985. ‘Stress-strain relationship for plain concrete in compression’. *ACI Journal*, vol. 82, pp. 797–804.
- Duarte, C. A. e Oden, J. T., (1995), Hp clouds - a meshless method to solve boundary-value problem., Relatório técnico, TICAM, The University of Texas at Austin.
- Duarte, C. A. e Oden, J. T., 1996. ‘An h-p adaptive method using cloud.’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 139, pp. 237–262.
- Hillerborg, A., Modeer, M. e Petersson, P. E., 1976. ‘Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements.’. *Cement and Concrete Research*, vol. 6(6), pp. 773–782.
- Jirásek, M., (2001), Modeling of localized damage and fracture in quasibrittle materials, in P. A. V. et al., ed., ‘Continuous and Discontinuous Modelling of Cohesive-Frictional Materials’, Springer-Verlag, Berlin and Heidelberg, pp. 17–29.
- Jirásek, M., 2007a. ‘Mathematical analysis of strain localization’. *Damage and fracture in geomaterials*, pp. 977–991.
- Jirásek, M., (2007b), Mathematical analysis of strain localization, in ‘ALERT Doctoral School 2007 - Damage and fracture in geomaterials’, Aussois, France.
- Karihaloo, B., 1995. *Fracture Mechanics and Structural Concrete*. Concrete design and construction series, Longman Scientific & Technical.

- Klein, P. e Gao, H., 1998. 'Crack nucleation and growth as strain localization in a virtual-bond continuum'. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 61, pp. 21–48.
- Melenk, J. M., 1995. On Generalized Finite Element Methods. Tese de Doutorado, University of Maryland, College Park.
- Mohammadi, S., 2008. *Extended finite element method for fracture analysis of structures*. Blackwell Pub.
- Penna, S. S., 2011. Formulação Multipotencial para Modelos de Degradação Elástica - Unificação Teórica, Proposta de Novo Modelo, Implementação Computacional e Modelagem de Estruturas de Concreto. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Pitangueira, R. L. S., 1998. Mecânica de Estruturas de Concreto com Inclusão de Efeitos de Tamanho e Heterogeneidade. Tese de Doutorado, PUC - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.
- Pituba, J. J. C., 1998. Estudo e aplicação de modelos constitutivos para o concreto fundamentados na mecânica do dano contínuo. Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil.
- Planas, J., Guinea, G. V. e Elices, M., 1999. 'Size effect and inverse analysis in concrete fracture.'. *International Journal of Fracture*, vol. 95, pp. 367–378.
- Rots, J. G., 1988. Computational modeling of concrete fracture. Tese de Doutorado, Delft University of Technology, Delft, Holanda.
- Shah, S. P., Swartz, S. E. e Ouyang, C., 1995. *Fracture Mechanics of Concrete: Applications of Fracture Mechanics to Concrete, Rock and other Quasi-Brittle Materials*. John Wiley & Sons, Inc., 605 Third Avenue, New York, NY 10158-0012.
- Silva, L. L., 2016. Sistema gráfico interativo para análise de nucleação e propagação de trincas. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Wells, G. N. e Sluys, L. J., 2001. 'A new method for modelling cohesive cracks using finite elements'. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 50(12), pp. 2667–2682.
- Wolff, K. P., 2010. Implementação computacional de um modelo de fissuração para o concreto baseado no método dos elementos finitos estendido (xfem). Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.