



MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS APLICADO A PROBLEMAS DE FRATURA ELÁSTICA EM 3D

Karla Fernanda dos Santos

Felício Bruzzi Barros

Roque Luiz da Silva Pitangueira

karlinha1100@gmail.com

felicio@dees.ufmg.br

roque@dees.ufmg.br

Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas - Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)

Av. Antônio Carlos, 6627 - Escola de Engenharia - Bloco 1 - 4º andar, sala 4215, Pampulha, CEP 31270-901, MG, Belo Horizonte, Brasil

Resumo. *O Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) foi consolidado no campo científico como uma ferramenta muito útil na resolução de modelos estruturais complexos usando uma abordagem aproximada efetiva para representar a propagação de trincas e outros microdefeitos. Trata-se de uma formulação não convencional do Método dos Elementos Finitos (MEF), na medida em que há a expansão do campo de soluções a partir da utilização de funções de enriquecimento associadas aos nós. As funções de enriquecimento podem ser funções singulares derivadas de deduções analíticas, funções polinomiais ou mesmo funções resultantes de outros processos de solução, como a estratégia Global-Local. O INSANE (INteractive Structural ANalysis Environment) é uma plataforma computacional em desenvolvimento do Departamento de Engenharia de Estruturas (DEES) da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG) e tem como objetivo analisar estruturas de interesse da engenharia. Em sua atual versão, é capaz de resolver problemas da Mecânica da Fratura Linear Elástica. Propõe-se a expansão do sistema para contemplar a possibilidade de utilizar diferentes funções de enriquecimento em modelos tridimensionais, como, por exemplo, funções que contêm singularidades e, futuramente, aquelas obtidas com a abordagem da técnica Global-Local. Os exemplos numéricos da Mecânica de Fratura Elástica Linear são apresentados para validar a implementação proposta.*

Palavras-chave: *Método dos Elementos Finitos (MEF), Enriquecimento com partição da unidade, Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG), Estratégia Global-Local.*

1 INTRODUÇÃO

De acordo com Fish e Belytschko (2007), muitos fenômenos da engenharia como, por exemplo, da engenharia de estruturas em geral, podem ser descritos em termos de equações diferenciais parciais. Para modelos mais simples, ou geometrias amplamente utilizadas, soluções analíticas podem ser facilmente encontradas. A maior parte, porém, dos problemas de interesse são compostos por geometrias altamente complexas o que inviabiliza a busca pela solução analítica via resolução das soluções das equações diferenciais do modelo.

O método dos Elementos Finitos (MEF) é uma estratégia para solução aproximada, geralmente numérica, muito utilizada nos casos complexos descritos anteriormente, pois o modelo é dividido em elementos e neles as equações diferenciais parciais são resolvidas de forma aproximada descrevendo a solução total do sistema. Do ponto de vista da engenharia, essa ferramenta pode ser utilizada para resolver problemas de análise de tensão-deformação, transferência de calor, escoamento de fluido, propagação de trincas e várias outras simulações computacionais (Fish e Belytschko, 2007).

A Figura 1 mostra um exemplo de um modelo composto por uma malha em três dimensões. Nota-se que o componente apresenta reentrâncias, buracos e descontinuidades, o que para a resolução via MEF com alto grau de precisão é necessária uma malha muito refinada. Isto significa aumentar o número de elementos, o número de nós e, por consequência, o número de graus de liberdade do modelo, elevando muito o custo computacional da análise.

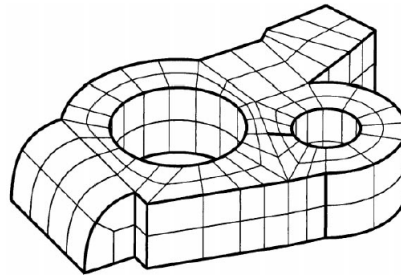


Figura 1: Exemplo de discretização de modelo com malha 3D (Adaptada) (Strouboulis et al., 2000).

Uma alternativa ao MEF, que pode ser considerada uma formulação não-convencional do mesmo, é o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG), (Strouboulis et al., 2000), que trata a presença de singularidades, não pelo refinamento da malha, mas sim pelo enriquecimento da função de forma dos nós que estão próximos a essas singularidades. Cria-se então um novo espaço de solução enriquecido a partir de uma base de funções ou um conjunto de soluções particulares conhecidas *a priori*, reduzindo os custos computacionais envolvidos no processo.

O Sistema INSANE (INteractive Structural ANalysis Environment), de acordo com Fonseca (2008), foi desenvolvido no Departamento de Engenharia de Estruturas (DEES) da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG) é um software que tem o objetivo de ser capaz de resolver diversos modelos via aproximações numéricas. É um programa dinâmico, portanto possibilita várias expansões e está aberto para que com pequenas modificações novos métodos sejam agregados ao seu arcabouço técnico. Na presente versão do sistema INSANE, o Método dos Elementos Finitos Generalizados foi implementado para diversos modelos de análise

e quaisquer dimensões segundo Alves et al. (2013). A expansão do sistema INSANE para a realização de análises considerando-se a estratégia global-local, conforme Kim et al. (2010), foi contemplada por (Malekan et al., 2016). Esta implementação, contudo, encontra-se limitada a problemas bidimensionais, assim como a utilização do enriquecimento com soluções definidas para a vizinhança da ponta de trinca para problemas da Mecânica da Fratura Linear Elástica.

Pretende-se expandir o sistema INSANE, generalizando-o, de tal forma, que problemas tridimensionais da Mecânica da Fratura Linear Elástica possam ser analisados adequadamente.

A referida expansão se dará inicialmente, conforme descrito neste trabalho, através da adaptação do sistema para a resolução de problemas em três dimensões, enriquecido com as expressões que representam a solução na vizinhança de uma trinca em meio linear elástico, como sugeridas por Duarte et al. (2000). Tais funções são capazes de descrever os três modos de abertura de trinca. Em um segundo passo, pretende-se generalizar, no que se refere à dimensão do problema analisado, a estratégia Global-local para a obtenção de funções resultantes da solução numérica de um ou mais problemas locais, e enriquecedoras da aproximação do problema. Pela própria forma como o sistema foi concebido, é possível aproveitar a estrutura existente e com modificações pontuais e mapeáveis alcançar o resultado desejado.

Neste texto, além da introdução, apresenta-se na Seção 2 conceitos e informações relevantes para o entendimento das análises feitas e da proposta deste trabalho, como os fundamentos do MEFG e a estruturação do INSANE. Na Seção 3 exemplos de simulações numéricas são apresentados, comparando-se os resultados obtidos de uma solução de referência com aqueles encontrados via MEFG e enriquecidos com funções especiais para a Mecânica da Fratura Linear Elástica. Por último, na Seção 4, as conclusões são apresentadas juntamente com o planejamento para o prosseguimento deste trabalho.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Método dos Elementos Finitos Generalizados e funções de enriquecimento

O Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) começou a ser desenvolvido por Babuška e outros pesquisadores como Duarte e Oden sobre diversas denominações, dentre elas “Método dos Elementos Finitos Especiais”, (Babuška et al., 1994), “Método das nuvens”, (Duarte, 1996), “Método dos Elementos Finitos da Partição da Unidade”, (Babuška e Melenk, 1997), e outros. Ademais de certas particularidades, o que esses métodos têm em comum e que os torna tratáveis com certa igualdade é o fato de se utilizarem da partição da unidade para gerar o espaço de solução enriquecido (Duarte et al., 2000).

Paralelamente ao desenvolvimento do MEFG, iniciou-se a pesquisa sobre o Método dos Elementos Finitos Estendido (XFEM) proposta por Belytschko e Black (1999). No XFEM também se utiliza a técnica de enriquecimento através do conceito da partição da unidade. Além disso, o enriquecimento é baseado na malha discretizada e seleciona-se qual conjunto de nós será enriquecido. Mesmo com essa divisão de denominações, todas as características abordadas anteriormente são comuns a ambos e hoje eles também são tratados de maneira idêntica (Fries e Belytschko, 2010).

O MEFG trata-se de uma combinação entre o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método da Partição da Unidade (MPU). Funções de singularidades ou funções polinomiais são

multiplicadas por funções de partição da unidade (PU) e acrescentadas à base de elementos finitos já existente, expandindo o espaço de solução (Strouboulis et al., 2000). A formulação da partição da unidade típica do MEFG são as próprias funções de forma do MEF, de modo a facilitar a integração numérica e conseguir recuperar a imposição direta das condições de contorno do modelo.

A formulação do MEFG começa com a descrição da PU. Uma definição rigorosa para estas funções pode ser encontrada em Oden e Reddy (2011). Aqui, esta definição é flexibilizada, e são utilizadas funções de Lagrange lineares, representadas por $N_j(\mathbf{x})$ associadas a cada nó, que somam a unidade, para o problema com n pontos nodais:

$$\sum_{j=1}^n N_j(\mathbf{x}) = 1 \quad (1)$$

Segundo Alves (2012), um conjunto de funções de enriquecimento local, $L_{ji}(\mathbf{x})$, que são específicas para cada problema a ser analisado, é composta por q_j funções linearmente independentes para cada nó \mathbf{x}_j , com suporte na nuvem de elementos w_j :

$$\{L_{ji}(\mathbf{x})\}_{i=1}^q = \{L_{j1}(\mathbf{x}), L_{j2}(\mathbf{x}), \dots, L_{jq}(\mathbf{x})\}, \quad \text{com } L_{j1}(\mathbf{x}) = 1 \quad (2)$$

O conjunto de funções de enriquecimento local será multiplicado pela PU a fim de criar o espaço de funções enriquecidas, $\phi_{ji}(\mathbf{x})$ (Alves, 2012):

$$\{\phi_{ji}(\mathbf{x})\}_{i=1}^q = N_j(\mathbf{x}) \times \{L_{ji}(\mathbf{x})\}_{i=1}^q \quad (3)$$

sem somatório em j .

A título de ilustração, apresenta-se uma malha convencional de elementos finitos bidimensional na Fig. 2a, na qual define-se uma nuvem de elementos w_j em que todos os elementos concorrem no ponto nodal \mathbf{x}_j . A Figura 2b mostra a PU, a Fig. 2c traz a função de enriquecimento Local, e por fim a Fig. 2d apresenta a multiplicação entre a partição da unidade e a função de enriquecimento local formando a função de $\phi_{ji}(\mathbf{x})$ de enriquecimento do método (Alves, 2012).

As funções de enriquecimento utilizadas no MEFG podem ser quaisquer, tais como uma função polinomial, uma função contendo uma singularidade, ou até mesmo uma função advinda de um outro processo de solução resolvido *a priori*, como por exemplo a técnica Global-Local, proposta por Duarte e Kim (2008) quando aliada ao MEFG. A técnica Global-Local é muito utilizada nos casos em que há fenômenos geradores de concentração de tensão nos modelos analisados.

Um tipo de função de enriquecimento possível de ser utilizada é a função de forma customizada para trincas em três dimensões. Ela foi proposta por Duarte et al. (2000) e trata-se de uma extensão do conhecimento das equações de elasticidade já utilizada em modelos de duas dimensões (Szabo e Babuška, 1988).

Para o entendimento das funções de singularidade mencionadas, considera-se um modelo, cuja borda está representada na Fig. 3. Nela a abertura de trinca é dada pelo ângulo $2\pi-\alpha$ e associado a borda tem-se o eixo Cartesiano Local (ξ, η, ζ) e o eixo Cilíndrico Local (r, θ, ζ') , ambos com a mesma origem (O_x, O_y, O_z) , (Duarte et al., 2000).

Na vizinhança da borda, o campo de deslocamentos $\mathbf{u}(r, \theta, \zeta')$ pode ser descrito como:

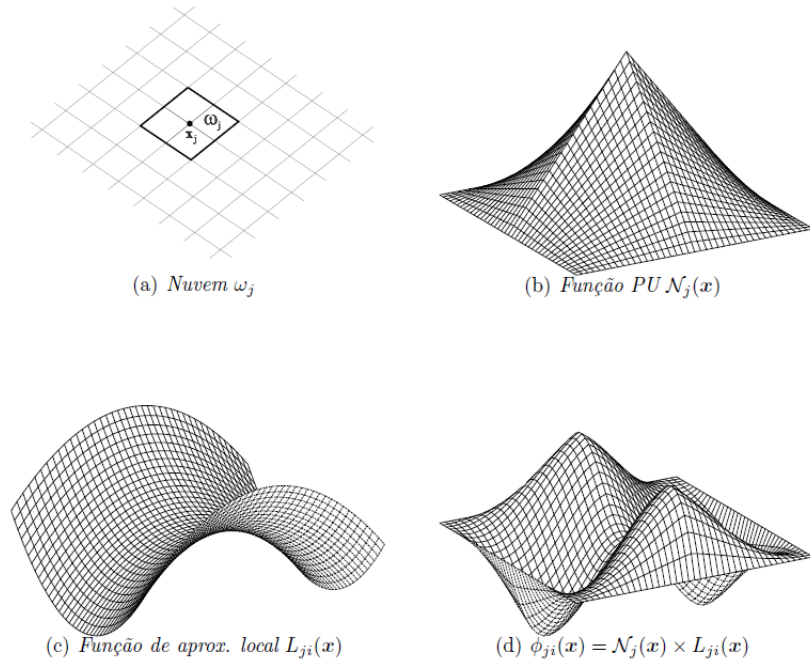


Figura 2: Estratégia de enriquecimento da nuvem ϖ_j via MEFG (Barros, 2002).

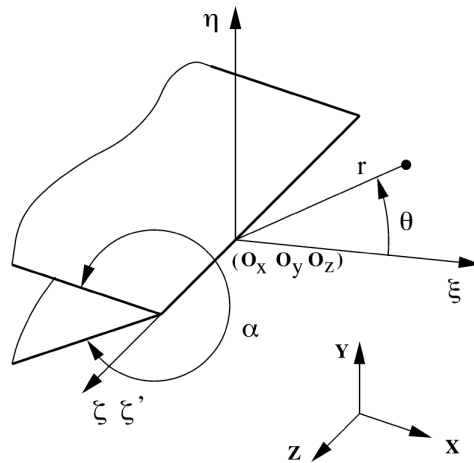


Figura 3: Eixos em três dimensões associados com a borda (Duarte et al., 2000).

$$\mathbf{u}(r, \theta, \zeta') = \begin{Bmatrix} u_\xi(r, \theta) \\ u_\eta(r, \theta) \\ u_\zeta(r, \theta) \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^{\infty} \left[A_j^{(1)} \begin{Bmatrix} u_{\xi j}^{(1)}(r, \theta) \\ u_{\eta j}^{(1)}(r, \theta) \\ 0 \end{Bmatrix} + A_j^{(2)} \begin{Bmatrix} u_{\xi j}^{(2)}(r, \theta) \\ u_{\eta j}^{(2)}(r, \theta) \\ 0 \end{Bmatrix} + A_j^{(3)} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_{\zeta j}^{(3)}(r, \theta) \end{Bmatrix} \right] \quad (4)$$

Na Equação (4), (r, θ, ζ') dizem respeito ao eixo Cilíndrico Local mostrado na Fig. 3, $u_\xi(r, \theta)$, $u_\eta(r, \theta)$ e $u_\zeta(r, \theta)$ são os componentes do vetor \mathbf{u} nas direções ξ -, η - e ζ - respectivamente, os índices (1), (2) e (3) referem-se às contribuições associadas aos modos I, II e III de abertura de trinca.

Considerando que o modelo está livre de tração na face em que ocorre a trinca e desconsi-

derando as forças de corpo, tem-se que $u_{\xi j}^{(1)}$, $u_{\eta j}^{(1)}$, $u_{\xi j}^{(2)}$ e $u_{\eta j}^{(2)}$:

$$u_{\xi j}^{(1)}(r, \theta) = \frac{r^{\lambda_j^{(1)}}}{2G} \left\{ \left[\kappa - Q_j^{(1)}(\lambda_j^{(1)} + 1) \right] \cos \lambda_j^{(1)} \theta - \lambda_j^{(1)} \cos(\lambda_j^{(1)} - 2)\theta \right\} \quad (5)$$

$$u_{\xi j}^{(2)}(r, \theta) = \frac{r^{\lambda_j^{(2)}}}{2G} \left\{ \left[\kappa - Q_j^{(2)}(\lambda_j^{(2)} + 1) \right] \sen \lambda_j^{(2)} \theta - \lambda_j^{(2)} \sen(\lambda_j^{(2)} - 2)\theta \right\} \quad (6)$$

$$u_{\eta j}^{(1)}(r, \theta) = \frac{r^{\lambda_j^{(1)}}}{2G} \left\{ \left[\kappa + Q_j^{(1)}(\lambda_j^{(1)} + 1) \right] \sen \lambda_j^{(1)} \theta + \lambda_j^{(1)} \sen(\lambda_j^{(1)} - 2)\theta \right\} \quad (7)$$

$$u_{\eta j}^{(2)}(r, \theta) = -\frac{r^{\lambda_j^{(2)}}}{2G} \left\{ \left[\kappa + Q_j^{(2)}(\lambda_j^{(2)} + 1) \right] \cos \lambda_j^{(2)} \theta + \lambda_j^{(2)} \cos(\lambda_j^{(2)} - 2)\theta \right\} \quad (8)$$

Para o caso de trincas $\alpha=2\pi$, desta maneira tem-se $\lambda_j^{(1)}=\lambda_j^{(2)}=\lambda_j$:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_j = \frac{j+1}{2} \quad j \geq 2 \quad (9)$$

As constantes do material κ e G :

$$\kappa = 3 - 4\nu \quad (10)$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (11)$$

Onde ν é o coeficiente de *Poisson*, E é o módulo de elasticidade longitudinal do material e G é o módulo de elasticidade transversal. A definição dessas constantes da maneira proposta, assume estado plano de deformação como uma boa aproximação para o estado de tensão na proximidade da trinca tridimensional, segundo Duarte et al. (2000).

Para trincas, os parâmetros Q_j^1 e Q_j^2 :

$$Q_j^1 = \begin{cases} -1 & j = 3, 5, 7, \dots \\ -\Lambda_j^{(1)} & j = 1, 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (12)$$

$$Q_j^2 = \begin{cases} -1 & j = 1, 2, 4, 6, \dots \\ -\Lambda_j^{(2)} & j = 3, 5, 7, \dots \end{cases} \quad (13)$$

Nas Equações (12) e (13) a variável $\Lambda_j^{(s)}$:

$$\Lambda_j^{(s)} = \frac{\lambda_j^{(s)} - 1}{\lambda_j^{(s)} + 1} \quad s = 1, 2 \quad (14)$$

Para a composição da parcela do vetor de deslocamento \mathbf{u} na direção ζ -, obtida a partir da expansão do modelo 2D para o modelo 3D, conforme mencionado anteriormente, tem-se $u_{\zeta j}^{(3)}$, considerando novamente que a face da trinca está livre de tração e desconsiderando forças de corpo:

$$u_{\zeta j}^{(3)} = \begin{cases} \frac{r^{\lambda_j^{(3)}}}{2G} \sen \lambda_j^{(3)} \theta & j = 1, 3, 5, \dots \\ \frac{r^{\lambda_j^{(3)}}}{2G} \cos \lambda_j^{(3)} \theta & j = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (15)$$

Sendo que, $\lambda_j^{(3)}$:

$$\lambda_j^{(3)} = \frac{j\pi}{\alpha} \quad j = 1, 2, \dots \quad (16)$$

Por fim, faz-se necessária a transformação de coordenadas para o Sistema Global x, y, z . Transforma-se primeiramente as coordenadas do vetor \mathbf{u} Cilíndricas (r, θ, ζ') para Coordenadas Cartesianas Locais (ξ, η, ζ) . Posteriormente de coordenadas Cartesianas Locais para as coordenadas Cartesianas Globais x, y, z .

As funções de aproximação Local são:

$$\begin{bmatrix} u_{x1}^{(1)} & u_{x1}^{(2)} \\ u_{y1}^{(1)} & u_{y1}^{(2)} \\ u_{z1}^{(3)} & u_{z2}^{(3)} \end{bmatrix} = R_2 \begin{Bmatrix} \tilde{u}_{\xi 1}^{(1)} & \tilde{u}_{\xi 1}^{(2)} \\ \tilde{u}_{\eta 1}^{(1)} & \tilde{u}_{\eta 1}^{(2)} \\ \tilde{u}_{\zeta 1}^{(3)} & \tilde{u}_{\zeta 2}^{(3)} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

Sendo que:

$$R_2 = (R_2^{-1})^T \quad (18)$$

Na Equação (17), as componentes do vetor \tilde{u} representam o vetor já com essas descritas no Sistema Global (x, y, z) . Além disso, a matriz da esquerda representa as funções de aproximação locais a serem utilizadas no MEFG. Na Equação (18), R_2^{-1} é a matriz de transformação de coordenadas cujas linhas são os vetores bases do Sistema de Coordenadas Locais (ξ, η, ζ) , (Duarte et al., 2000).

2.2 Implementação computacional

O INSANE (INteractive Structural ANalysis Environment) é um sistema computacional em desenvolvimento do Departamento de Engenharia de Estruturas (DEES) da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), implementado em linguagem de programação JAVA e que utiliza o paradigma da Programação Orientada a Objetos (POO) (Fonseca, 2008). O INSANE foi expandido no trabalho de Alves (2012) para permitir análises pelo MEFG e também considerando a abordagem Global-Local. Nessa expansão o sistema foi concebido para permitir a utilização dos diversos modelos de análise e elementos presentes no INSANE. Em Alves et al. (2013) ele é validado para problemas do tipo uni, bi e tridimensionais analisados via MEFG. Em Malekan et al. (2016) a estratégia MEFG com Global-Local é também validada no INSANE para problemas de estado plano e de placas. Resta ainda a generalização e validação do MEFG utilizando funções de aproximação local contendo singularidades e também da estratégia Global-Local para modelos tridimensionais.

O INSANE pode ser dividido em três grandes grupos de funcionamento, pré-processador, processador e pós-processador. O primeiro e o último são responsáveis, respectivamente, pelas entradas e saídas do programa, via gráficos e arquivo, ou seja, fazem a interação homem-máquina. Já o processador é a parte mais importante do programa, pois é a responsável pela resolução dos modelos já que representa o núcleo numérico do sistema para os diversos métodos de resolução, como, por exemplo, o próprio MEFG. A estrutura do núcleo numérico é composta pelas interfaces *Assembler* e *Persistence* e as classes abstratas *Model* e *Solution*. Através do diagrama de classes Unifield Modeling Language (UML) apresentado na Fig. 4 é possível observar esses componentes e a relação existente entre eles (Alves, 2012).

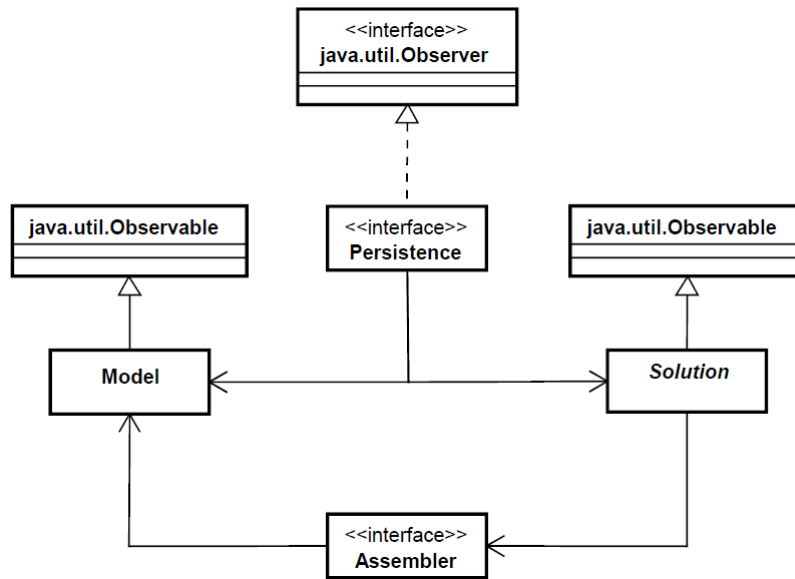


Figura 4: Diagrama UML do Núcleo Numérico do INSANE (Alves, 2012).

A interface *Assembler* é responsável pela montagem do sistema matricial do modelo e há, dentre outras, a classe *GFemAssembler* que a implementa de acordo com os dados do MEFG, o qual é o objeto do presente estudo. O sistema matricial de segunda ordem a ser montado é apresentado na equação:

$$A\ddot{X} + B\dot{X} + CX = D \quad (19)$$

Na Equação (19), A , B e C são matrizes, D é um vetor e X representa o vetor solução do sistema, contemplando o caso geral de um problema de valor inicial e de contorno.

Segundo Alves (2012), simplificando para o caso de análise estrutural estática, os dois primeiros termos são eliminados e as matrizes e vetores resultantes são mostrados nas equações:

$$\begin{bmatrix} C_{uu} & C_{up} \\ C_{pu} & C_{pp} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_u \\ X_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_p \\ R_u \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} F_p \\ F_u \end{Bmatrix} \quad (20)$$

$$\begin{Bmatrix} R_p \\ R_u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_p \\ N_u \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} E_p \\ E_u \end{Bmatrix} \quad (21)$$

Na Equação (20), C representa a matriz de rigidez, X o vetor de deslocamentos, R o vetor de forças nodais equivalente aos esforços externos e F o vetor de forças nodais equivalente aos esforços internos. Na Equação (21), há a decomposição do vetor R , que se separa nas parcelas N que representa as forças aplicadas diretamente nos nós e E que inclui as forças ou deslocamentos nodais equivalentes. É importante mencionar que os índices u e p significam incógnitos e prescritos, respectivamente.

A classe abstrata *Model* organiza a forma como são armazenadas as informações referentes ao modelo discreto. Estende-se dela a classe *GFemModel*, específica do método MEFG.

A interface *Persistence* faz a comunicação entre a Interface *Model* e a Classe Abstrata

Solution a partir da interpretação de dados de entrada e o fornecimento de dados de saída para outras aplicações. Ela já está equipada para atender ao MEFG (Alves, 2012).

A classe abstrata *Solution* reúne os recursos necessários para a solução do sistema matricial. Na abordagem do MEFG pode ser que após o enriquecimento crie-se uma matriz de rigidez final positiva semi-definida tornando a solução do sistema existente, porém não única. Exige-se, neste caso, a aplicação de procedimentos especiais para a solução deste tipo de problema (Strouboulis et al., 2000).

Uma classe abstrata importante para esse trabalho é a *EnrichmentType*. A referida classe reúne de forma geral os métodos necessários para realizar o enriquecimento das funções de forma via MEFG, independentemente do tipo de função de enriquecimento local utilizada. Nela é possível chamar métodos que retornam os multiplicadores de enriquecimento e suas derivadas nas três direções.

A classe *CrackEnrichmentModeI* estende da classe *EnrichmentType* e ela é responsável por guardar as informações referentes as funções que contém singularidades que descrevem uma trinca trabalhando no Modo I, combinado com o Modo III. Nessa classe, as Eq. (5), (7) e (15) para $j=1$ estão implementadas.

A classe *CrackEnrichmentModeII* estende da classe *EnrichmentType* e ela é responsável por guardar as informações referentes as funções que contém singularidades que descrevem uma trinca trabalhando no Modo II, combinado com o Modo III. Nessa classe, as Eq. (6) e (8) para $j=1$ e (15) para $j=2$ estão implementadas.

É importante ressaltar que não há uma classe específica para o enriquecimento com funções que contém singularidades que descrevem uma trinca trabalhando em Modo III, devido a forma como o INSANE foi concebido, sendo estritamente necessário que o enriquecimento se dê nas três direções, ainda que com coeficientes diferentes. Desta forma fazem-se necessárias as combinações descritas anteriormente, culminando em apenas duas classes de enriquecimento.

A Figura 5 mostra resumidamente como se dá o processamento no INSANE da montagem da matriz de rigidez de um modelo para o MEFG, considerando que os dados de entrada já foram fornecidos pelo ator através de arquivo texto ou entrada gráfica.

Na Figura 5 os números e letras representam:

- 1** - Montar/Retornar a Matriz de rigidez para o modelo.
- 2** - Montar/Retornar a Matriz de rigidez para cada elemento.
- 3a** - Consultar elemento e retornar tipo de modelo de análise.
- 4a** - Consultar/Retornar tipo de modelo de análise.
- 3b** - Consultar elemento e retornar coordenadas naturais e propriedades dos materiais.
- 4b** - Consultar degeneração e retornar coordenadas naturais e propriedades dos materiais.
- 3c** - Consultar elemento e retornar função de forma e derivadas.
- 4c** - Informar incidência e retornar função de forma e derivadas.
- 5c** - Consultar/Retornar Partição da Unidade.
- 6c** - Consultar cada nó e retornar função de enriquecimento.

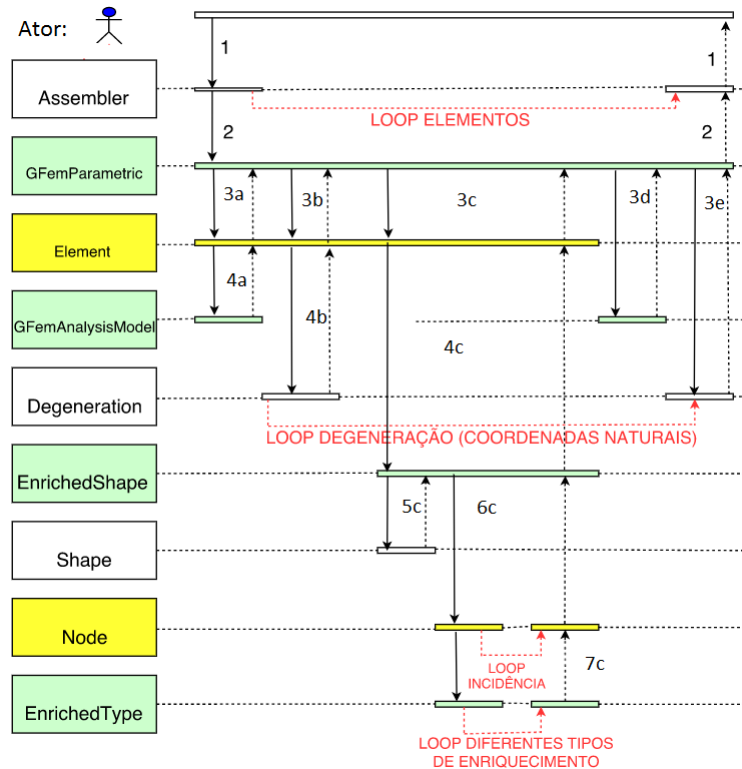


Figura 5: Diagrama de Montagem de Matriz de Rigidez no INSANE (Adaptada) (Alves, 2012).

7c - Consultar cada tipo de enriquecimento e retornar a função de enriquecimento.

3d - Fornecer função de forma e derivadas e retornar matriz B, fator de integração e Jacobiano da transformação.

3e - Consultar degeneração e retornar função peso.

Ainda na Figura 5 as classes ilustradas, não mencionadas no texto até este momento, representam (Alves, 2012):

Degeneration - Representa os pontos de integração e propriedades geométricas.

Shape - Representa a função de forma do elemento.

Node - Representa a entidade nó e as informações discretas associadas a ele.

Element - Representa o elemento finito.

GFemAnalysisModel - Representa o modelo de análise do elemento.

GFemParametric - Responsável pelas informações dos elementos paramétricos.

3 ANÁLISE DE MODELOS ESTRUTURAIS VIA MEFG

3.1 Chapa tracionada

Nesta seção, considera-se uma chapa de dimensões (20.00 x 10.00 x 0.10) unidades consistentes (u.c.), com uma pré-trinca de dimensões (2.00 x 0.10) u.c.. Ela está restringida na face

inferior de forma que o deslocamento vertical em y - é totalmente impedido, o deslocamento horizontal x - somente é impedido na linha de $x=0$ e o deslocamento de corpo rígido é impedido a partir da vinculação de um ponto em z -. O material que a constitui possui módulo de elasticidade (E) igual a 1 u.c. e coeficiente de Poisson (ν) igual a 0.3. A tensão de tração (σ) é aplicada na face superior e tem valor de 1 u.c.. A Figura 6 mostra em detalhes o modelo trabalhado.

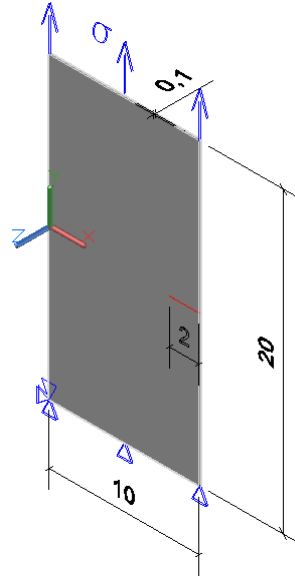


Figura 6: Modelo de Chapa com Pré-Trinca Tractionada

A solução de referência desse problema foi obtida utilizando o software ANSYS[®] com malha de 12228 elementos finitos tetraédricos quadráticos (10 nós). O resultado encontrado para a energia de deformação foi de 10.96257 u.c..

A malha utilizada no INSANE é de elementos finitos hexaédricos trilineares (8 nós). A trinca foi descrita na malha coincidindo com a aresta dos elementos, nós duplos foram utilizados para representar a descontinuidade. A Figura 7 mostra esquematicamente as duas malhas que são utilizadas nos modelos. A primeira é constituída por 50 elementos e a segunda por 100 elementos, a trinca é demarcada pelas linhas em vermelho. Já a Figura 8, mostra os nós que serão enriquecidos com as Eq. (5), (6), (7) e (8) para $j=1$ e (15) para $j=1$ e $j=2$, na análise via MEF. São utilizados $4 \times 4 \times 4$ pontos para a integração pela quadratura de Gauss nos elementos que modelam a chapa.

Foram adotadas três análises, "A", "B" e "C", descritas a seguir. Na análise "A" são utilizadas as funções capazes de descrever o Modo I de abertura de trinca, ou seja, Eq. (5) e (7) para $j=1$, além da primeira parcela da série que descreve o Modo III de abertura de trinca, a saber, Eq. (15) para $j=1$. Na análise "B" são utilizadas as funções capazes de descrever o Modo II de abertura de trinca, ou seja, Eq. (6) e (8) para $j=1$, além da segunda parcela das funções que descrevem o Modo III de abertura de trinca, a saber, Eq. (15) para $j=2$. Já na situação "C" são utilizadas todas as funções que descrevem os três Modos de abertura de trinca.

Foram calculados os valores da diferença relativa percentual dos modelos analisados, com relação à solução de referência, E_r :

$$E_r(\%) = 100 \cdot \frac{|U_r - U_h|}{|U_r|} \quad (22)$$

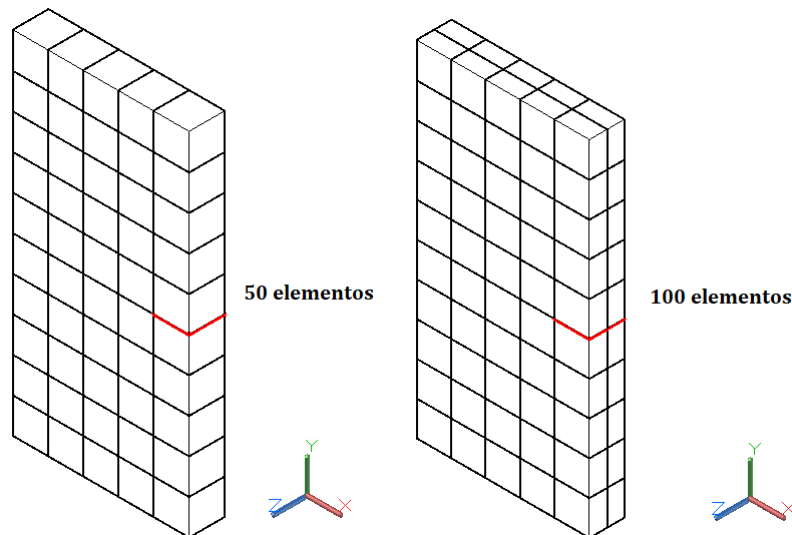


Figura 7: Desenho esquemático da malha e discretização da trinca do modelo da chapa.

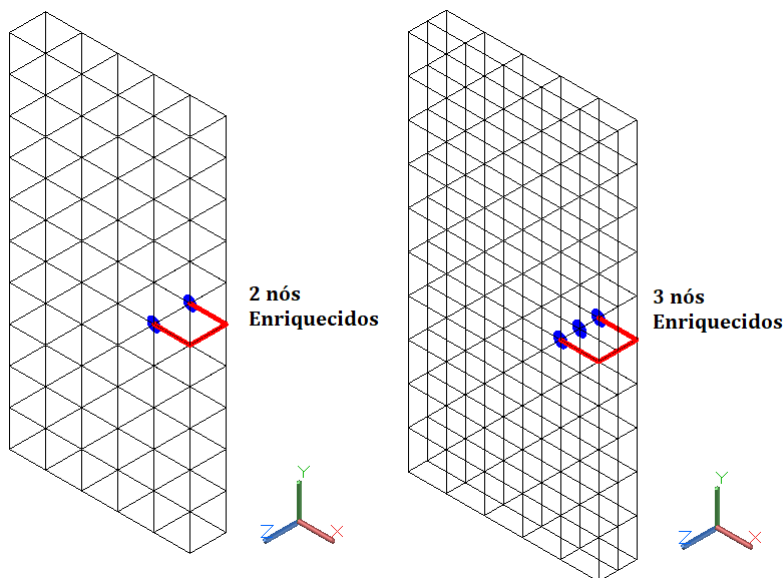


Figura 8: Desenho esquemático dos nós a serem enriquecidos do modelo.

Na Equação 22, U_h é a energia aproximada pelo MEEG e U_r a energia da solução de referência.

Os valores de energia de deformação para cada uma das análises descritas anteriormente foram reunidos e encontram-se na Tabela 1.

Os resultados da Tabela 1 mostram que a utilização do enriquecimento com funções singulares reduz muito a diferença da energia. Além disso, as funções de abertura de trinca do Modo I juntamente com as do Modo III se mostram mais eficientes, na medida em que a situação "A" retorna valores de energia mais próximos da referência e por consequência a situação "C" que se trata da sua associação com as funções do Modo II retornam valores melhores ainda. Tal resultado já era esperado, pois nesse modelo se tem essencialmente o modo I de abertura de trinca acontecendo.

Tabela 1: Energia de deformação para os modelos da chapa - 3D

Tipo de Modelagem	Energia de Deformação	Diferença Energia (%)
Referência	10.962570	
50 elementos s/ enriquecimento	10.560793	3.67
100 elementos s/ enriquecimento	10.560789	3.67
50 elementos situação A	10.834990	1.16
100 elementos situação A	10.834994	1.16
50 elementos situação B	10.560793	3.67
100 elementos situação B	10.560794	3.67
50 elementos situação C	10.834991	1.16
100 elementos situação C	10.841675	1.10

Além disso, devido a espessura reduzida da chapa, o modelo em três dimensões deve reproduzir os resultados do modelo de mesmas características analisado em duas dimensões. Observa-se, por exemplo, que a discretização na espessura praticamente não surtiu efeito no caso das análises "A" e "B", indicando uma variação maior, mas ainda bastante pequena no caso da análise "C". As mesmas situações anteriores foram analisadas em uma malha 2D de 50 elementos quadriláteros de 4 nós. Para o modelo bidimensional foi considerado estado plano de tensão e parâmetro do material κ , segundo Szabo e Babuška (1988):

$$\kappa = \frac{3 - \nu}{1 + \nu} \quad (23)$$

Os valores de energia de deformação para cada uma das análises foram reunidos e encontram-se na Tabela 2.

Tabela 2: Energia de deformação para os modelos da chapa - 2D

Tipo de Modelagem	Energia de Deformação
50 elementos s/ enriquecimento	10.564656
50 elementos situação A	10.844779
50 elementos situação B	10.564656
50 elementos situação C	10.844779

Como pode-se perceber os valores de energia em duas e três dimensões, para situações correlatas, estão bem próximos, o que significa que sofreram pouca influência da terceira dimensão do problema e também das funções de enriquecimento singular que representam o Modo III de abertura de trinca, conforme esperado.

3.2 Bloco tracionado

Nesta seção, considera-se um bloco de dimensões (10.00 x 5.00 x 5.00) u.c., com uma pré-trinca de dimensões (1.00 x 5.00) u.c.. Ele está completamente restringido na face inferior, tendo, portanto, todos os deslocamentos nesta face impedidos. O material possui módulo de elasticidade (E) igual a 1000 u.c. e módulo de Poisson (ν) igual a 0.3. A tensão de tração (σ) é aplicada na face superior, no sentido de y - e tem valor de 1 u.c.. A Figura 9 mostra em detalhes o modelo analisado.

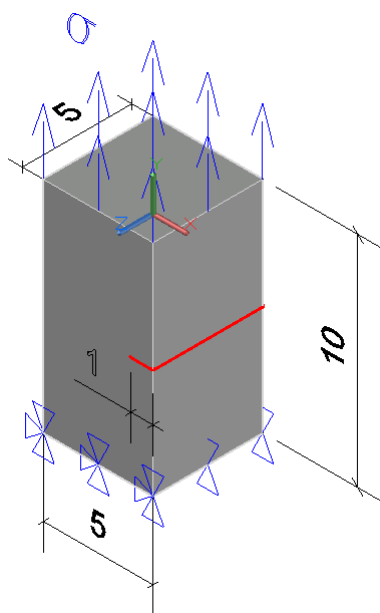


Figura 9: Modelo de bloco com pré-trinca tracionado

A solução de referência desse problema foi obtida utilizando o software ANSYS[®] com malha de 10136 elementos finitos tetraédricos quadráticos (10 nós), concentrados na vizinhança da frente da superfície de trinca. O resultado encontrado para a energia de deformação foi de 0.133597 u.c..

A malha utilizada no INSANE é de elementos finitos hexaédricos trilineares (8 nós). A trinca foi descrita na malha coincidindo com a aresta dos elementos, nós duplos foram utilizados para representar a descontinuidade. A Figura 10 mostra esquematicamente a malha de 250 elementos finitos que será utilizada nos modelos, onde a trinca é demarcada pelas linhas em vermelho. Já a Figura 11, mostra os 6 ou 48 nós, ao redor da ponta da trinca, que serão enriquecidos com as Eq. (5), (6), (7) e (8) para $j=1$ e (15) para $j=1$ e $j=2$, na análise via MEFG. Para o modelo do bloco, são utilizados 12 x 12 x 12 pontos para a integração pela quadratura de Gauss nos elementos que contém nós enriquecidos e 2 x 2 x 2 nos demais, com o objetivo de minimizar o erro da integração numérica das funções com singularidade. Na Subseção 3.4 será apresentada uma análise de sensibilidade a este respeito.

As mesmas análises da Subseção 3.1 foram aqui adotadas e nomeadas como, "A", "B" e "C".

Os valores de energia de deformação para cada uma das análises descritas anteriormente foram reunidos e encontram-se na Tabela 3.

Na Tabela 3, os resultados mostram que ao enriquecer mais nós e com todas as funções que

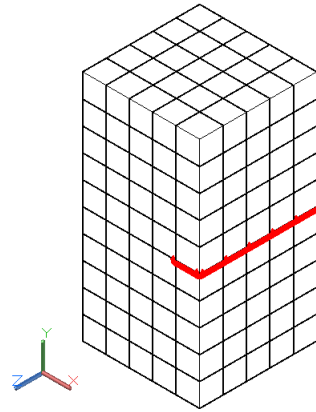


Figura 10: Desenho esquemático da malha de 250 elementos e discretização da trinca do modelo do bloco.

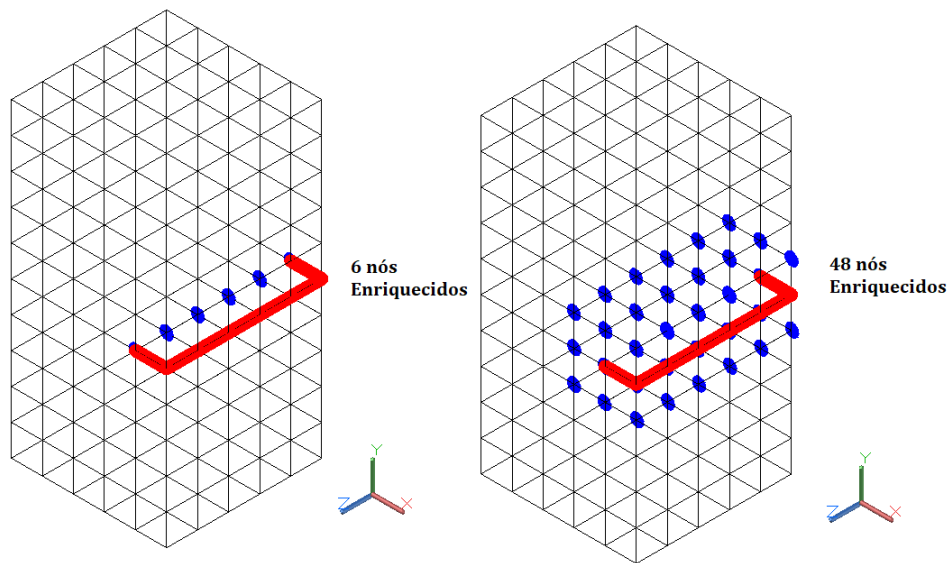


Figura 11: Desenho esquemático dos nós a serem enriquecidos do modelo.

Tabela 3: Energia de deformação para os modelos da bloco - Tração y-

Tipo de Modelagem	Energia de Deformação	Diferença Energia (%)
Referência	0.133597	
S/ enriquecimento	0.129206	3.29
6 nós enriquecidos situação A	0.132360	0.93
48 nós enriquecidos situação A	0.132989	0.46
6 nós enriquecidos situação B	0.129208	3.29
48 nós enriquecidos situação B	0.129893	2.77
6 nós enriquecidos situação C	0.132381	0.91
48 nós enriquecidos situação C	0.133253	0.26

descrevem os três modos de abertura de trinca, menor é a diferença na energia. Deve-se lembrar aqui que a base do bloco se encontra completamente restrita em termos de deslocamentos. Por esta razão, não se tem, como na chapa, uma tração pura e, conseqüentemente, ainda que predomine, o modo I de abertura ocorre juntamente com os demais.

3.3 Bloco submetido a cisalhamento em x

Nesta seção, considera-se o mesmo bloco da Subseção 3.2, com a mesma vinculação e material. A diferença se mostra na tensão (σ), agora de cisalhamento, aplicada ainda na face superior, porém agora no sentido de x -, seu valor continua sendo de 1 em u.c.. A Figura 12 mostra em detalhes o modelo analisado.

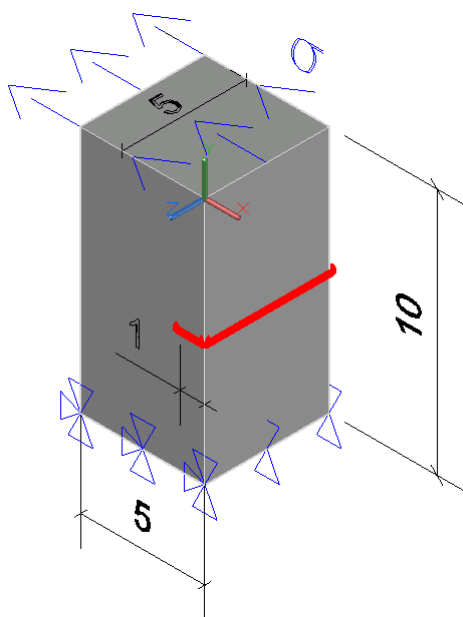


Figura 12: Modelo de bloco com pré-trinca tensionado em x-

A solução de referência desse problema foi obtida utilizando o software ANSYS[®] com malha de 10136 elementos finitos tetraédricos quadráticos (10 nós). O resultado encontrado para a energia de deformação foi de 2.588063 u.c..

A malha utilizada no INSANE é a mesma da Subseção 3.2, sendo também composta por 250 elementos finitos hexaédricos trilineares (8 nós). A trinca foi, novamente, descrita na malha coincidindo com a aresta dos elementos e nós duplos foram utilizados para representar a descontinuidade.

As mesmas quatro análises são realizadas, o modelo é analisado sem enriquecimento via MEF e de acordo com as análises "A", "B" e "C" descritas na Subseção 3.1.

Os valores de energia de deformação para cada uma das análises descritas anteriormente são reunidos e Tabela 4. Os resultados mostram que ao enriquecer mais nós e com todas as funções que descrevem os três modos de abertura de trinca, menor é a diferença na energia, de modo semelhante ao já observado na Subseção 3.2, para o bloco tracionado.

Tabela 4: Energia de deformação para os modelos da bloco - Cisalhamento x-

Tipo de Modelagem	Energia de Deformação	Diferença Energia (%)
Referência	2.588063	
S/ enriquecimento	2.423007	6.38
6 nós enriquecidos situação A	2.485230	3.97
48 nós enriquecidos situação A	2.499189	3.43
6 nós enriquecidos situação B	2.424489	6.32
48 nós enriquecidos situação B	2.440715	5.69
6 nós enriquecidos situação C	2.487146	3.90
48 nós enriquecidos situação C	2.509446	3.04

3.4 Bloco submetido a cisalhamento em z

Nesta seção, considera-se o mesmo bloco da Subseção 3.2, com a mesma vinculação e material. A diferença se mostra na tensão (σ), agora de cisalhamento, aplicada ainda na face superior, porém agora no sentido de z-, seu valor continua sendo de 1 em u.c.. A Figura 13 mostra em detalhes o modelo trabalhado.

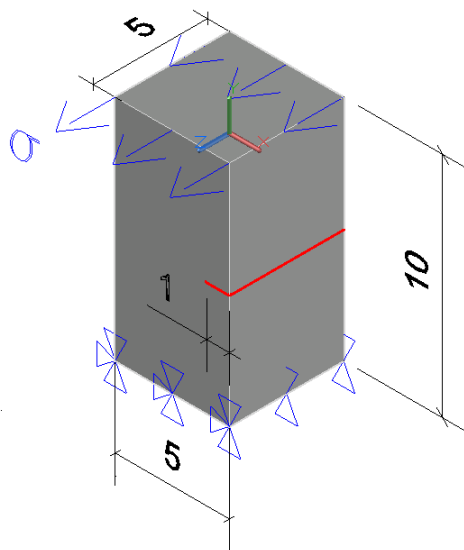


Figura 13: Modelo de bloco com pré-trinca tensionado em z-

A solução de referência desse problema foi obtida utilizando o software ANSYS[®] com malha de 10136 elementos finitos tetraédricos quadráticos (10 nós). O resultado encontrado para a energia de deformação foi de 2.419249 u.c..

A malha utilizada no INSANE é a mesma da Subseção 3.2, sendo também composta por 250 elementos finitos hexaédricos trilineares (8 nós). A trinca foi, novamente, descrita na malha coincidindo com a aresta dos elementos e nós duplos foram utilizados para representar a

descontinuidade.

As mesmas quatro análises são realizadas, sendo uma sem enriquecimento via MEF e as demais de acordo com as análises "A", "B" e "C" descritas na Subseção 3.1. Adicionalmente, para esse modelo, será feita uma quinta análise, chamada "D". Ela é semelhante a análise "C", diferindo apenas do fato que o enriquecimento com a equação que descreve o Modo III de abertura de trinca, a saber, Eq. 15 com $j=2$, estará bloqueado. Busca-se com esta análise adicional, observar a influência que este segundo termo da série tem sobre a solução total.

Os valores de energia de deformação para cada uma das análises descritas anteriormente foram reunidos e encontram-se na Tabela 5.

Tabela 5: Energia de deformação para os modelos do Bloco - Cisalhamento z-

Tipo de Modelagem	Energia de Deformação	Diferença Energia (%)
Referência	2.419249	
S/ enriquecimento	2.302912	4.81
6 nós enriquecidos situação A	2.332592	3.58
48 nós enriquecidos situação A	2.337279	3.39
6 nós enriquecidos situação B	2.303573	4.78
48 nós enriquecidos situação B	2.309136	4.55
6 nós enriquecidos situação C	2.333715	3.54
48 nós enriquecidos situação C	2.340461	3.26
6 nós enriquecidos situação D	2.333129	3.56
48 nós enriquecidos situação D	2.339114	3.31

Na Tabela 5, os resultados mostram que ao enriquecer mais nós e com todas as funções que descrevem os três modos de abertura de trinca, menor é a diferença na energia, de modo semelhante ao já observado nas análises anteriores. Quanto a análise adicional "D", foi possível observar que a influência do segundo termo da série da função que descreve o Modo III de abertura de trinca não é muito expressivo, porém começa a se mostrar com maior significância a medida que mais nós são enriquecidos.

Um estudo, da influência da quantidade dos pontos de integração pela quadratura de Gauss nos elementos que contém nós enriquecidos, foi realizado. Para tanto foram feitas 4 análises adicionais a análise "C", anteriormente descrita, são elas numeradas de "1" a "4". A análise "1", guarda como única diferença do que está sendo feito a utilização de apenas 4 x 4 x 4 pontos de integração nos referidos elementos. Já a análise "2" utiliza 6 x 6 x 6 pontos nesses elementos. A análise "3" utiliza 8 x 8 x 8 pontos nesses elementos. Por fim, a análise "4" utiliza 10 x 10 x 10 pontos nesses elementos.

Pela análise da Tabela 6, percebe-se que há uma sutil sensibilidade do resultado a quantidade de pontos de integração utilizados no elemento. Desta forma, para minimizar resultados ilusórios de energia, mais altos do que realmente são, decidiu-se utilizar, no modelo do bloco,

Tabela 6: Energia de deformação para os modelos do Bloco: Comparação pontos de integração - Cisalhamento z-

Tipo de Modelagem	Energia de Deformação	Diferença Energia (%)
6 nós enriquecidos situação C1	2.334320	3.51
6 nós enriquecidos situação C2	2.333907	3.53
6 nós enriquecidos situação C3	2.333792	3.53
6 nós enriquecidos situação C4	2.333743	3.53
6 nós enriquecidos situação C	2.333715	3.54

12 x 12 x 12 pontos, melhorando, assim, a integração numérica.

4 CONCLUSÃO

O MEFM vem se mostrando uma ferramenta poderosa para a modelagem de estruturas complexas, como por exemplo, aquelas que contém trinca, na medida em que com uma malha menos refinada é capaz de gerar bons resultados. Nesse contexto, o enriquecimento das funções de forma dos nós, via MEFM, com funções de singularidade, como as mostradas nesse trabalho se afirmaram como funcionais e capazes de melhorar os resultados a partir de sua aplicação nos modelos apresentados.

Nos exemplos fica claro que a utilização das quatro funções de singularidade descritas na Subseção 2.1, que descrevem os três modos de abertura de trinca, geram melhores resultados. Além disso, quanto mais nós se enriquece, mais a solução se aproxima da solução de referência, que foi construída via MEF com muitos elementos finitos de alta complexidade. Desta maneira, há uma economia no custo computacional sem que se perca muito na qualidade do resultado.

Embora tenham sido alcançadas soluções satisfatórias e próximas da solução de referência, essas ainda poderiam ser melhoradas, reduzindo ainda mais a diferença na energia. Para tanto, propõe-se para um próximo passo desse trabalho a utilização da técnica Global-Local. Com a utilização da referida técnica, obtém-se uma função de aproximação personalizada para o problema que está sendo resolvido gerando melhores resultados e em última instância contribui ainda mais para que o sistema INSANE fique ainda mais completo.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o apoio financeiro em forma de fomento à pesquisa concedido pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) (grant 308932/2016-1) e pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG) (pela bolsa de mestrado, projeto APQ-02460-16 e financiamento da participação).

REFERÊNCIAS

Alves, P. D. *Estratégia Global-Local Aplicada ao Método dos Elementos Finitos Generalizados*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil, Maio 2012.

- Alves, P. D.; Barros, F. B.; Pitangueira, R. L. S. An object-oriented approach to the generalized finite element method. *Advances in Engineering Software*, v. 59, p. 1–18, 2013.
- Babuška, I.; Caloz, G.; Osborn, J. E. Special finite element methods for a class of second order elliptic problems with rough coefficients. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, v. 31, p. 945–981, 1994.
- Babuška, I.; Melenk, J. M. The partition of unity finite element method. *International journal for numerical methods in engineering*, v. 40, p. 727–58, 1997.
- Barros, F. B. *Métodos Sem Malha e Métodos dos Elementos Finitos Generalizados em Análise Não-Linear de Estruturas*. Tese (Doutorado) — EESC - USP, São Carlos, SP, Brasil, 2002.
- Belytschko, T.; Black, T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International journal for numerical methods in engineering*, v. 45, p. 601–620, 1999.
- Duarte, C. A. *The hp cloud method*. Tese (Doutorado) — University of Texas at Austin, Austin, TX, USA, December 1996.
- Duarte, C. A.; Babuška, I.; Oden, J. T. Generalized finite element methods for three-dimensional structural mechanics problems. *Computers and Structures*, v. 77, p. 215–232, 2000.
- Duarte, C. A.; Kim, D.-J. Analysis and applications of a generalized finite element method with global-local enrichment functions. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, v. 197, p. 487–504, 2008.
- Fish, J.; Belytschko, T. *A First Course in Finite Elements*. West Sussex, England: John Wiley & Sons, Inc., 2007. ISBN 978-0-470-03580-1.
- Fonseca, F. T. da. *Sistema Computacional para Análise Dinâmica Geometricamente Não-Linear Através do Método dos Elementos Finitos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil, Agosto 2008.
- Fries, T. P.; Belytschko, T. The extended/generalized finite element method: An overview of the method and its applications. *International journal for numerical methods in engineering*, v. 84, p. 253–304, 2010.
- Kim, D.-J.; Pereira, J. P.; Duarte, C. A. Analysis of three-dimensional fracture mechanics problems: A two-scale approach using coarse-generalized fem meshes. *International journal for numerical methods in engineering*, v. 81, p. 335–365, 2010.
- Malekan, M.; Barros, F. B.; Pitangueira, R. L. S.; Alves, P. D.; Penna, S. S. A computational framework for a two-scale generalized/extended finite element method: generic imposition of boundary conditions. *Engineering Computations*, v. 34, 2016.
- Oden, J. T.; Reddy, J. N. *An Introduction to the Mathematical Theory of the Finite Element Method*. [S.l.]: Dover, 2011. ISBN 978-0-486-46299-8.
- Strouboulis, T.; Babuška, I.; Copps, K. The design and analysis of the generalized finite element method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, v. 181, p. 43–69, 2000.
- Szabo, B. A.; Babuška, I. *Computation of the amplitude of stress singular terms for cracks and reentrant corners*. [S.l.]: Cruse TA (ed) Fracture mechanics: nineteenth symposium, 1988. ISBN ASTM STP 969.