



PARTIÇÃO DA UNIDADE COM ELEVADA REGULARIDADE PARA A ANÁLISE DE ESTRUTURAS

Débora Coelho Cordeiro Pinheiro

Felício Bruzzi Barros

Roque Luiz da Silva Pitangueira

deboracordeiro@ufmg.br

felicio@dees.ufmg.br

roque@dees.ufmg.br

Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas – Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)

Av. Antônio Carlos, 6627 - Escola de Engenharia - Bloco 1 - 4o andar, sala 4215, Pampulha, CEP 31270-901, MG, Belo Horizonte, Brazil

Abstract. No Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) a aproximação é construída com base em funções de Partição da Unidade (PU) enriquecidas pela sua multiplicação por funções especialmente escolhidas para o tipo de solução a ser descrita. Esta é a mesma estratégia proposta no Método Sem Malha das Nuvens hp . A principal diferença entre estas duas abordagens de aproximação numérica para problemas de valor de contorno é o tipo de PU adotado. No MEFG são utilizadas as funções Lagrangianas de primeira ordem de continuidade C^0 , também empregadas nas formulações do Método dos Elementos Finitos. Já no Método das Nuvens hp são usadas funções de mínimos quadrados móveis propostas para este fim no Método dos Elementos Livres de Galerkin. Em (Duarte et al., 2006) e em (Barros et al., 2007) as funções de PU do MEFG são construídas com base na mesma estratégia do Método das Nuvens hp , possibilitando a obtenção de funções aproximadoras de continuidade do tipo C^k , onde k pode ser arbitrariamente definido. Neste trabalho, a partição da unidade de elevada regularidade é utilizada no Método das Nuvens hp . Esta estratégia é implementada na plataforma computacional INSANE (Interactive Structural Analysis Environment) e seu desempenho é avaliado em exemplos numéricos. **Keywords:** MEFG, Método das nuvens hp , Partição da unidade, funções C^k

1 INTRODUÇÃO

No método das Nuvens hp proposto por (Duarte, 1996) as funções de forma são construídas a partir do produto da Partição de Unidade (PU) com as funções denominadas de enriquecimento. Dentro da abordagem dos métodos sem malha, uma forma simples de se construir a PU é através das funções de Shepard, que possuem continuidade diretamente relacionada à continuidade das funções peso pelas quais são construídas. Caso se queira recuperar a propriedade do Delta de Kronecker, ou seja, possibilitar a aplicação direta das condições de contorno, pode-se fazer com que o domínio de influência de um nó x_j , chamado de nuvem ω_j , seja formado pelas células de integração que compartilham o nó x_j .

A utilização de aproximações de alto grau de continuidade elimina as descontinuidades do campo de tensões entre células de integração. Tais aproximações são construídas a partir do procedimento de Edwards (Edwards, 1996), onde a PU é obtida através de Funções de Shepard (Shepard, 1968) e funções de distância especiais. Entretanto, o procedimento de Edwards demanda nuvens convexas. Para transpor essa limitação, Duarte et al. (Duarte et al., 2006) propõem a obtenção das funções peso de continuidade C^k , com k arbitrariamente grande, construídas a partir de funções booleanas do tipo R sobre a nuvem ω_j , convexa ou não.

Os Métodos sem Malha possuem grande flexibilidade na construção de aproximações conformes, entretanto, um grande número de pontos de integração é geralmente necessário. Uma alternativa que ameniza este problema, além de facilitar a implementação dos Métodos sem Malha, é o emprego da malha de elementos finitos para a construção de uma Partição da Unidade arbitrariamente suave (Duarte et al., 2006, 2004). Neste caso, o método não é mais propriamente sem malha. Entretanto, mantém características atrativas do Métodos sem Malha, tais como a propriedade da Partição da Unidade e a alta regularidade da aproximação (Freitas, 2015).

Neste trabalho, a partição da unidade de grau de continuidade arbitrário é empregada no Método das Nuvens hp. Esta estratégia é implementada na plataforma computacional INSANE (*Interactive Structural Analysis Environment*).

A Partição da Unidade, juntamente com as Funções de Shepard e as funções peso de continuidade C^∞ , para nuvens convexas, e C^k , para nuvens não convexas, são apresentadas na Seção 2. O Método dos Mínimos Quadrados Móveis (MMQM) é descrito na Seção 3. O Método das Nuvens hp é discutido em 4. O Método dos Elementos Finitos Generalizados é, por sua vez, discutido na Seção 5. A plataforma computacional INSANE e os novos recursos nela implementados são apresentados na Seção 6. Na Seção 7 são apresentados os exemplos numéricos para a validação e justificativa de relevância dos recursos implementados. Finalmente, a conclusão é apresentada na Seção 8.

2 PARTIÇÃO DA UNIDADE

De acordo com (Oden and Reddy, 1976), uma classe de funções $\psi_j(\mathbf{x})$ em um domínio Ω em $\mathbb{R}^n$, cuja envoltória é formada pela união dos conjuntos abertos $\{G_j\}_{j=1}^N$, forma uma partição da unidade se apresentar as seguintes propriedades:

1. $\psi_j(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(G_j)$
2. $\sum_{j=1}^N \psi_j(\mathbf{x}) = 1$

3. $\psi_j(\mathbf{x}) \geq 0$ em Ω ;
4. Todo sub-conjunto compacto de Ω intercepta um número finito de suportes de $\psi_j(\mathbf{x})$.

Este conjunto de propriedades é bastante restritivo, por esta razão, nas interpretações realizadas para o Método das Nuvens hp, o MEF e o MEF, considera-se que somente a segunda propriedade é essencial. Com o atendimento a essa condição, garante-se a convergência da aproximação a medida que novos pontos são acrescentados ao domínio (Barros, 2002).

2.1 Funções de Shepard

As funções de Shepard foram desenvolvidas por (Shepard, 1968) e foram empregadas na construção da partição da unidade de diversos métodos sem malha, entre eles o Método das Nuvens hp (Duarte and Oden, 1996b,a). A PU construída a partir das funções de Shepard é definida por:

$$\psi_j(\mathbf{x}) = W_j(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) / \sum_{r=1}^{n(\mathbf{x})} W_r(\mathbf{x} - \mathbf{x}_r) \quad (1)$$

onde W_j é a função peso. A função W_j possui suporte compacto, isto é, apresenta valores diferentes de zero somente para pontos da nuvem ω_j .

É possível verificar que:

$$\sum_{j=1}^{n(\mathbf{x})} \psi_j(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n(\mathbf{x})} \left\{ \frac{W_j(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)}{\sum_{r=1}^{n(\mathbf{x})} W_r(\mathbf{x} - \mathbf{x}_r)} \right\} = 1 \quad (2)$$

o que garante que ψ_j constitui uma PU. Os demais critérios que caracterizam uma PU também são atendidos no caso do uso das Funções de Shepard com nuvens convexas.

A função ψ_j , definida acima, herdará das funções peso sua característica de suporte compacto. Além disso, a regularidade de ψ_j é unicamente dependente da regularidade das funções peso (Duarte et al., 2006).

As funções da Partição da Unidade de Shepard são capazes de representar exatamente somente uma função constante. Por esta razão, são utilizadas funções de enriquecimento polinomiais em métodos numéricos, tal como o Método das Nuvens hp, onde a PU de Shepard é utilizada.

2.2 Funções de continuidade C^∞ para nuvens convexas

Segundo (Belytschko et al., 1994), a continuidade da aproximação $\psi_j(\mathbf{x})$ definida na Eq. (1) depende da continuidade da função peso.

Para o caso de uma malha em duas dimensões, com nuvens convexas e funções de aresta exponenciais, a continuidade C^∞ das funções W_j é garantida pelo uso do procedimento de Edwards original (Edwards, 1996). A partição de unidade é obtida da forma descrita a seguir.

Inicialmente, são definidas as funções de aresta, $\varepsilon_{j,i}(\mathbf{x})$, associadas com a nuvem ω_j . Tais funções tendem a zero suavemente a medida que se aproximam da aresta i e são maiores que zero em pontos do interior da nuvem.

$$\varepsilon_{j,i}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} e^{-\xi_i(\mathbf{x})^{-\gamma}} & , \quad \xi_j > 0 \\ 0 & , \quad \xi_j(\mathbf{x}) \leq 0 \end{cases} \quad (3)$$

onde γ é uma constante positiva e $\xi_i(\mathbf{x}) = \mathbf{n}_i \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{b}_i)$ é a distância entre a posição $\mathbf{x}$ e a aresta j , conforme Fig. 1.

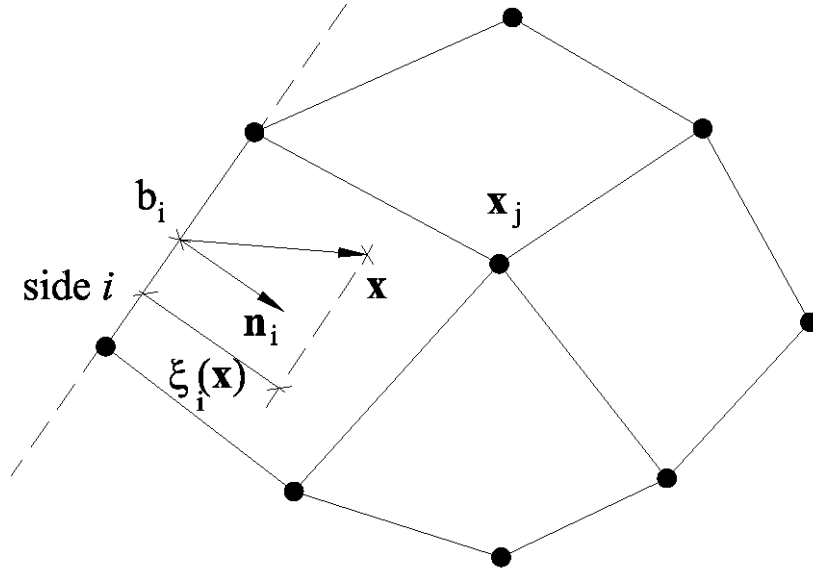


Figura 1: Nuvem convexa

Com o objetivo de garantir que todas as funções de aresta possuam o mesmo valor em um mesmo ponto $\mathbf{x}_j$ da nuvem, ou seja, $\varepsilon_{j,i}(\mathbf{x}_j) = \varepsilon_{j,k}(\mathbf{x}_j)$ para todas as arestas i e k de ω_j , é definido o vetor $\mathbf{n}_i$:

$$\mathbf{n}_i = \left(\frac{1 - 2^\gamma}{\ln \beta} \right)^{1/\gamma} \cdot |\hat{\mathbf{n}}_i \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{b}_i)|^{-1} \cdot \hat{\mathbf{n}}_i \quad (4)$$

onde $\hat{\mathbf{n}}_i$ é um vetor unitário na aresta i que aponta para o interior da nuvem e β é uma constante positiva. A função peso $W_j(\mathbf{x})$ é definida pelo produto das funções de contorno da nuvem:

$$W_j(\mathbf{x}) = e^{c_j} \prod_{i=1}^{M_j} \varepsilon_{j,i}(\mathbf{x}) \quad (5)$$

onde M_j é o número de arestas da nuvem ω_j e $c_j = M_j (1 - 2^\gamma / \ln \beta)^{-1}$ é um fator de escala (Duarte et al., 2006).

A PU é finalmente obtida ao se substituir a expressão (5) em (2). A função aproximadora resultante terá continuidade C^∞ nos nós de nuvens convexas.

2.3 Funções de continuidade C^k para nuvens não convexas

Para nuvens não convexas as funções de aresta definidas anteriormente apresentarão valores nulos no interior da nuvem, o que conduzirá a valores nulos das funções peso no interior da nuvem. Para contornar esse problema, as funções R (Shapiro, 1991) foram empregadas em (Duarte et al., 2006) na criação de funções peso adequadas para nuvens não convexas. As funções R são funções booleanas, reais e com propriedade de terem seu sinal definido completamente pelos sinais de seus argumentos. A função definida a seguir é a função conjunção R com dois argumentos:

$$(x \vee_{\alpha}^k y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{1 + \alpha} \left(x + y + \sqrt{x^2 + y^2 - 2\alpha xy} \right) (x^2 + y^2)^{k/2} \quad (6)$$

onde $-1 < \alpha(x, y) < 1$ é uma função simétrica arbitrária, $\vee$ é o operador lógico da conjunção "ou" e k é um inteiro positivo.

Neste trabalho, será empregada a seguinte função R (R_0^k):

$$(x \vee_0^k y) \stackrel{\text{def}}{=} \left(x + y + \sqrt{x^2 + y^2} \right) (x^2 + y^2)^{k/2} \quad (7)$$

Esta função é analítica em todo domínio, com exceção da origem $x = y = 0$. Na origem, ela é k vezes diferenciável. Além disso, a propriedade

$$(x \vee_0^k y) \begin{cases} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ and } y = 0 \\ > 0 \forall x > 0 \text{ or } y > 0 \end{cases} \quad (8)$$

possibilitou a utilização em (Duarte et al., 2006) desta função na construção de uma nova função de aresta associada a duas arestas adjacentes da nuvem não convexa correspondente ao nó re-entrante.

Por exemplo, para os lados m e n da nuvem da Fig. 2, a função de aresta será:

$$\varepsilon_{j,mn}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(\varepsilon_{j,m}(\mathbf{x}) \vee_0^k \varepsilon_{j,n}(\mathbf{x}))}{(\varepsilon_{j,m}(\mathbf{x}_j) \vee_0^k \varepsilon_{j,n}(\mathbf{x}_j))} \quad (9)$$

O termo no denominador é o fator de escala e k é uma constante inteira escolhida de acordo com o grau de suavidade desejado para a função. Ao utilizar-se a função $\varepsilon_{j,mn}(\mathbf{x})$ no lugar de $\varepsilon_{j,m}(\mathbf{x})$ e $\varepsilon_{j,n}(\mathbf{x})$, uma nova expressão é obtida para a função peso $W_j(\mathbf{x})$:

$$W_j(\mathbf{x}) = \left(e^{c_j} \prod_{i=1}^{M_j} \varepsilon_{j,i}(\mathbf{x}) \right) \varepsilon_{j,mn}(\mathbf{x}) \quad (10)$$

A função acima definida não apresenta valores nulos no interior da nuvem e será no mínimo diferenciável k vezes.

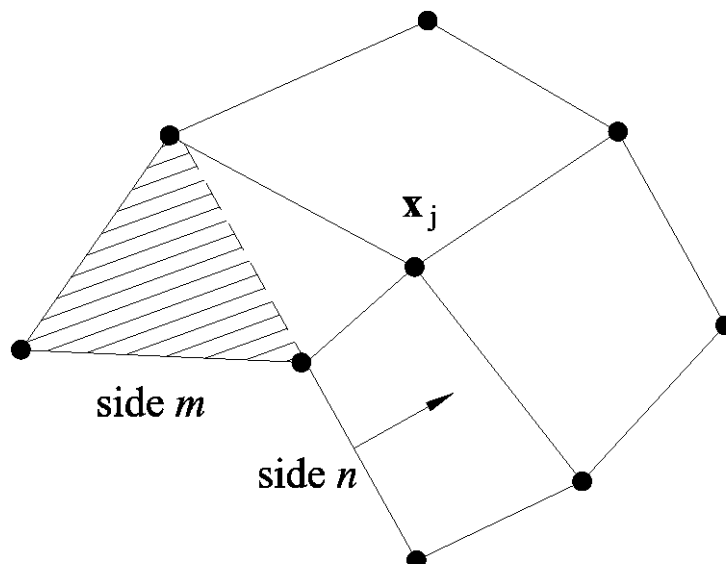


Figura 2: Nuvem não convexa

3 MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS MÓVEIS (MMQM)

O Método dos Mínimos Quadrados Móveis (MMQM) ou *Moving Least Squares* (MLS) é um método de aproximação numérica introduzido por (Lancaster and Salkauskas, 1981). Trata-se de uma variação do Método dos Mínimos Quadrados (MMQ). A diferença básica entre os dois métodos é o emprego, no MMQM, de uma função de ponderação que acompanha o ponto onde se deseja definir a aproximação. Uma importante característica das funções obtidas por essa técnica é o fato de constituírem uma partição da unidade (Barros, 2002). Além disso, a função aproximadora é contínua e suave no domínio do problema e pode-se produzir uma aproximação com a ordem desejada (da Silva, 2012).

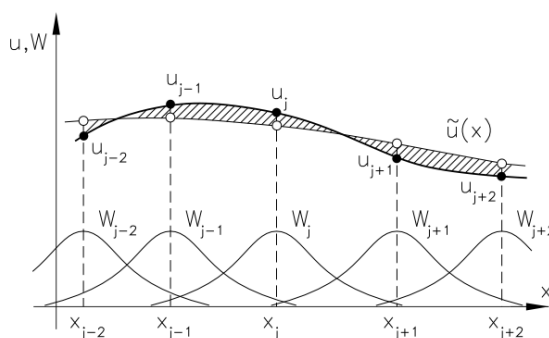


Figura 3: Método dos Mínimos Quadrados Móveis

Considera-se o problema de uma função contínua $u(\mathbf{x}) : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^\eta$, ($\eta = 1$), que deve ser aproximada conhecendo-se apenas seus valores u_j em um conjunto de pontos nodais $\mathcal{Q}_N = \{\mathbf{x}_j\}_{j=1}^N$, $\mathbf{x}_j \in \bar{\Omega}$. A Fig. 3 apresenta esse problema como um ajuste de curvas em campo uni-dimensional. Vale ressaltar que, no caso geral, é válido $\bar{\Omega}$ em $\mathbb{R}^\eta$, para $\eta = 1, 2$ ou 3 .

Em cada posição $\mathbf{x}$ do domínio, uma aproximação local $\tilde{u}(\mathbf{x})$ deve ser definida empregando-

se um sub-conjunto de $n(\mathbf{x}) \leq N$ pontos vizinhos $\hat{\mathcal{Q}}_{n(\mathbf{x})} \subset \mathcal{Q}_N$. Do sub-conjunto $n(\mathbf{x})$ fazem parte os nós pertencentes ao domínio de suporte de $\mathbf{x}$.

A aproximação local $\tilde{u}(\mathbf{x})$, para cada posição $\mathbf{x}$ do domínio, pode ser expressa na forma de uma combinação linear de uma base de funções $\mathbf{P} = \{p_i\}_{i=1}^m$, ($m \leq n(\mathbf{x})$), segundo os parâmetros α_i :

$$u(\mathbf{x}) \approx \tilde{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m p_i(\mathbf{x})\alpha_i(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) \quad (11)$$

Emprega-se geralmente uma base de monômios $\mathbf{P}_k$ capaz de gerar um espaço de polinômios completos até o grau k .

Seja W_j uma função peso de suporte compacto, ou seja, $W_j \in C_0^l(\omega_j)$, onde l representa a continuidade de W_j , ω_j a nuvem do nó $\mathbf{x}_j$ que coincide com a região em que a função peso é definida e o zero indica que a função tem valor não-nulo apenas no interior de ω_j . A função W_j permite que os nós mais próximos de $\mathbf{x}$ contribuam mais do que os distantes do ponto de interesse.

A função $J(\mathbf{x})$, definida a seguir, é composta pelas distâncias entre $\tilde{u}(\mathbf{x})$ e $u(\mathbf{x})$, ponderadas pelas funções W_j . No MMQM, minimiza-se a função $J(\mathbf{x})$ para encontrar os coeficientes $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})$.

$$J(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n(\mathbf{x})} W_j(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \{u_j - \tilde{u}(\mathbf{x}_j)\}^2 \quad (12)$$

Participam da soma acima somente os $n(\mathbf{x})$ pontos nodais $\mathbf{x}_j$ cuja região de influência ω_j contenha $\mathbf{x}$. Os coeficientes $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})$ são determinados por:

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n(\mathbf{x})} \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}_j(\mathbf{x}) u_j \quad (13)$$

onde:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_{r=1}^{n(\mathbf{x})} W_r(\mathbf{x} - \mathbf{x}_r) \mathbf{p}(\mathbf{x}_r) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_r) \quad (14)$$

$$\mathbf{B}_j(\mathbf{x}) = W_j(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \mathbf{p}(\mathbf{x}_j) \quad (15)$$

Sendo assim, reescreve-se a aproximação (11):

$$u(\mathbf{x}) \approx \tilde{u}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n(\mathbf{x})} \phi_j(\mathbf{x}) u_j = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{U} \quad (16)$$

sendo ϕ_j um elemento genérico da base de funções de aproximação, com o mesmo suporte ω_j das funções peso e definido por:

$$\phi_j(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}_j(\mathbf{x}) \quad (17)$$

Definem-se os seguintes vetores de parâmetros nodais e de funções de forma:

$$\mathbf{U}^T \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_N \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\Phi^T \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \cdots & \phi_N \end{bmatrix} \quad (19)$$

A existência da inversa de $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ depende da conveniente definição dos R_j de modo que respeite a condição $n(\mathbf{x}) \geq m$. Tal condição é necessária mas não suficiente (Duarte, 1996), além de restringir a liberdade de definição da distribuição nodal. O enriquecimento polinomial da aproximação pode ser obtido aumentando-se o grau máximo do espaço de polinômios gerado pela base $\mathbf{P}_k$ com a introdução de novos termos. Este procedimento, entretanto, produz matrizes $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ de elevada ordem encarecendo computacionalmente a técnica de aproximação.

A forma e o tipo das funções de ponderação W_j têm grande influência na construção da aproximação, sendo diretamente responsáveis, em combinação com a base $\mathbf{P}$, pela sua continuidade. Pode-se demonstrar que:

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) \in C_0^{\min(k,l)}(\omega_j) \text{ se } \begin{cases} \mathbf{P} \in C^k(\omega_j) \\ W_j(\mathbf{x}) \in C_0^l(\omega_j) \end{cases} \quad (20)$$

Para uma base de funções $\mathbf{P}_0 = \{1\}$, obtêm-se a classe de funções de Shepard.

4 MÉTODO DAS NUVENS HP

Em (Duarte, 1996) é proposta uma nova classe de funções de aproximação denominada de Funções das Nuvens hp. Estas funções são construídas a partir do enriquecimento das aproximações do MMQM multiplicadas por funções linearmente independentes. As funções obtidas por esse procedimento formam uma PU.

Considera-se que as funções de aproximação (17) tenham sido obtidas a partir de uma base $\mathbf{P}_k = \{p_i\}_{i=1}^m$ de m monômios que geram o espaço polinomial de grau máximo k , denominado $\mathcal{P}_k$. As funções que constituem a família de Nuvens-hp $\mathfrak{S}_N^{k,p}$, que aproximam qualquer polinômio de ordem menor ou igual a $p > k$, são definidas como:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_N^{k,p} &\stackrel{\text{def}}{=} \{ \{ \phi_j(\mathbf{x}) \}_{j=1}^N \cup \{ \phi_j(\mathbf{x}) p_i(\mathbf{x}) \}_{j=1}^N ; \\ &\quad i = m+1, \dots, q(p); p_i \in \mathcal{P}_p - \mathcal{P}_k; p \geq k \} \end{aligned} \quad (21)$$

onde $\mathcal{P}_p$ é o espaço polinomial de grau máximo p gerado pela base $\mathbf{P}_p = \{p_i\}_{i=1}^{q(p)}$ formada por $q(p)$ monômios. A fim de tornar a aproximação independente das dimensões do problema, é aconselhável que os monômios $\mathcal{P}_p - \mathcal{P}_k$ sejam normalizados e anulados nos pontos nodais associados às funções da PU $\{\phi_j(\mathbf{x})\}_{j=1}^N$. Em $\mathbb{R}^2$, por exemplo, o polinômio de grau r em x e s em y , que enriquece a PU associada a um nó $\mathbf{x}_j$, é:

$$p_{ji}(\mathbf{x}) = \left(\frac{x - x_j}{h_j^x} \right)^r \left(\frac{y - y_j}{h_j^y} \right)^s \quad (22)$$

sendo h_j^x e h_j^y dimensões características da nuvem em x e y , respectivamente.

As funções de enriquecimento são geralmente polinomiais, mas podem ser de outro tipo, dependendo do tipo de aproximação que se deseja obter.

A função aproximadora do Método das Nuvens hp , obtida através da substituição das funções definidas em (21) na aproximação (16), tem como expressão final:

$$u_p(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \phi_j(\mathbf{x}) \left\{ u_j + \sum_{i=m+1}^{q_j(p)} p_{ji}(\mathbf{x}) b_{ji} \right\} = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{U} \quad (23)$$

onde são definidos os vetores de parâmetros nodais e das funções de forma seguintes:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^T &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} u_1 & b_{1m+1} & \cdots & b_{1q_1} & \cdots & u_N & b_{Nm+1} & \cdots & b_{Nq_N} \end{bmatrix} \\ \mathbf{\Phi}^T &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \phi_1 & p_{1m+1}\phi_1 & \cdots & p_{1q_1}\phi_1 & \cdots & \phi_N & p_{Nm+1}\phi_N & \cdots & p_{Nq_N}\phi_N \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (24)$$

onde b_{ji} , $i = m+1, \dots, q_j(p)$ são novos parâmetros associados a $\mathbf{x}_j$ devido ao enriquecimento. Esses parâmetros podem variar para cada nó. Sendo assim, a quantidade de funções vinculadas ao nó $\mathbf{x}_j$ é representada por $q_j(p)$, ou seja, é função do nó e da ordem polinomial máxima p que se deseja representar.

Em (Duarte and Oden, 1996b) demonstra-se que, se o conjunto $\{\phi_j(\mathbf{x})\}_{j=1}^N$ forma uma PU, a função $u_p(\mathbf{x})$ pode aproximar exatamente qualquer elemento do espaço de $\mathcal{P}_p$. O emprego da notação $u_p(\mathbf{x})$ no lugar de $\tilde{u}(\mathbf{x})$ em (23) indica que a aproximação construída representa exatamente polinômios de grau máximo p . A forma $\tilde{u}(\mathbf{x})$ será reservada para os casos gerais, incluindo aproximações capazes de reproduzir funções não-polinomiais, o que ocorre quando outros tipos de funções multiplicarem a PU. Nesse caso, a expressão (23) é substituída por:

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \phi_j(\mathbf{x}) \left\{ u_j + \sum_{i=1}^{q_j} L_{ji}(\mathbf{x}) b_{ji} \right\} = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{U} \quad (25)$$

onde L_{ji} corresponde à "i-ésima" função que multiplica a PU do nó $\mathbf{x}_j$, podendo ser polinomial ou não, e q_j representa o número de funções L_{ji} utilizadas. Para essa representação geral, o

vetor das funções de forma definido como:

$$\Phi^T \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \phi_1 & L_{11}\phi_1 & \cdots & L_{1q_1}\phi_1 & \cdots & \phi_N & L_{N1}\phi_N & \cdots & L_{Nq_N}\phi_N \end{bmatrix} \quad (26)$$

Nas aplicações das aproximações de Nuvens-*hp* de (Duarte, 1996) e (Duarte and Oden, 1996b) foram empregadas as funções de Shepard para se construir a PU $\{\phi_j(\mathbf{x})\}_{j=1}^N$. Como já observado, tais funções geram aproximações bastante pobres. Entretanto, apresentam como vantagens a facilidade de implementação em qualquer dimensão e o baixo custo computacional, pois não há necessidade de se inverter a matriz $A(\mathbf{x})$ em cada posição de cálculo da aproximação $\tilde{u}(\mathbf{x})$. As funções de Shepard simplificam o processo de construção da PU a ser enriquecida. Desta forma, um desempenho computacional superior ao das funções de MMQM é obtido sem perda da qualidade da aproximação.

5 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS (MEFG)

De acordo com (Duarte et al., 2000), o MEFG foi proposto independentemente por: Babuška e colegas com o nome de Método dos Elementos Finitos Especiais em (Babuška et al., 1994) e como Método da Partição da Unidade em (Melenk and Babuška, 1996; Babuška and Melenk, 1997); e por Duarte e Oden como uma formulação híbrida do MEF, em (Duarte and Oden, 1995), (Duarte, 1996), (Duarte and Oden, 1996b), (Duarte and Oden, 1996a) e (Oden et al., 1998). De acordo com (Barros, 2002), a denominação de Método dos Elementos Finitos Generalizados foi empregada primeiramente por (Melenk, 1995).

Trata-se de uma particularização do Método das Nuvens *hp*. O MEFG é considerado uma ponte entre os Métodos sem Malha e o MEF por estrategicamente utilizar as funções de forma do MEF como PU e enriquecê-las à maneira do Método das Nuvens *hp*. Desta forma, contorna-se os principais problemas inerentes aos Métodos sem Malha, a imposição de condições de contorno e a integração numérica custosa, e ao mesmo tempo, aproveita-se avanços dos Métodos sem Malha como o enriquecimento.

No MEFG, as funções de aproximação do MEF passam a ser interpretadas como PU. A qualidade da aproximação é aprimorada através da multiplicação da PU original por funções de enriquecimento tipicamente utilizadas no Método das Nuvens *hp*. (Alves et al., 2013)

Considera-se uma malha de elementos finitos em duas dimensões definida por n pontos nodais $\{x_j\}_j = 1^n$. Em seguida, define-se a nuvem ω_j , formada pelos elementos que possuem o nó x_j em comum. A Fig. 4 apresenta o esquema de enriquecimento da Partição da Unidade em $\mathbb{R}^2$ para a nuvem ω_j . Nesta ilustração, encontram-se representados a PU de ordem 1 geradora de uma aproximação C^0 , uma função especial arbitrária e o resultado do produto entre essas duas funções. A função resultante apresenta as características aproximadoras da função especial, ao mesmo tempo que herda o suporte compacto da PU. Sendo assim, constrói-se uma aproximação global, obtida em um dado elemento pela combinação das funções produto relativas a cada nó, sem que seja penalizada a continuidade (no caso do tipo C^0) entre os elementos. Desta forma, os elementos se mantêm conformes.

Define-se a família de Nuvens-*hp* para o MEFG:

$$\mathfrak{N}_N^{k=1} = \{\{\mathcal{N}_j(\mathbf{x})\}_{j=1}^N \cup \{\mathcal{N}_j(\mathbf{x})L_{ji}(\mathbf{x})\}_{j=1}^N \mid i \in \mathcal{J}_j\} \quad (27)$$

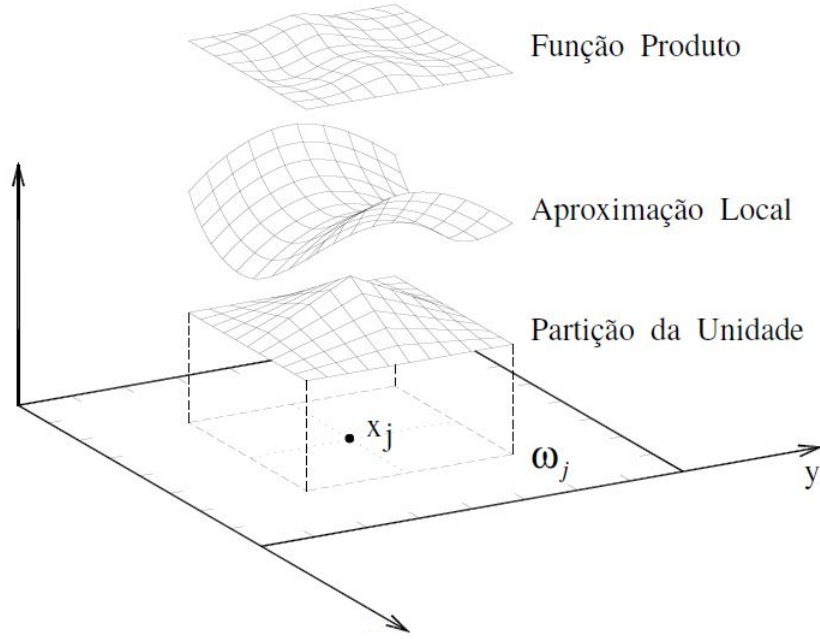


Figura 4: Esquema de enriquecimento da Partição da Unidade (Barros, 2002)

utilizada para construir a seguinte aproximação:

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \mathcal{N}_j(\mathbf{x}) \left\{ u_j + \sum_{i=1}^{q_j} L_{ji}(\mathbf{x}) b_{ji} \right\} = \Phi^T \mathbf{U} \quad (28)$$

onde:

$$\mathbf{U}^T \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} u_1 & b_{11} & \cdots & b_{1q_1} & \cdots & u_N & b_{N1} & \cdots & b_{Nq_N} \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\Phi^T \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \phi_1 & L_{11}\mathcal{N}_1 & \cdots & L_{1q_1}\mathcal{N}_1 & \cdots & \phi_N & L_{N1}\mathcal{N}_N & \cdots & L_{Nq_N}\mathcal{N}_N \end{bmatrix}$$

Assim como no Método das Nuvens hp, se as funções L_{ij} forem todas polinomiais, é definindo a família $\mathcal{S}_N^{k=1,p}$. Sendo assim, a aproximação $\tilde{u}$ será representada de modo particular como:

$$u_p(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \mathcal{N}_j(\mathbf{x}) \left\{ u_j + \sum_{i=1}^{q_j(p)} p_{ji}(\mathbf{x}) b_{ji} \right\} = \Phi^T \mathbf{U} \quad (30)$$

onde:

$$\Phi^T \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \phi_1 & p_{11}\mathcal{N}_1 & \cdots & p_{1q_j(p)}\mathcal{N}_1 & \cdots & \phi_N & p_{N1}\mathcal{N}_N & \cdots & p_{Nq_j(p)}\mathcal{N}_N \end{bmatrix} \quad (31)$$

6 INSANE

O INSANE é um projeto de *software* livre em desenvolvimento no Departamento de Engenharia de Estruturas da Universidade Federal de Minas Gerais que visa disponibilizar um

ambiente computacional de código aberto, com características tais que facilitem sua expansão e manutenção. A linguagem JAVA é utilizada no desenvolvimento das aplicações do INSANE. Por possuir vantagens como a portabilidade, que possibilita a criação de um software cujo funcionamento independe do sistema operacional, e o suporte ao paradigma da Programação Orientada a Objetos (POO), a utilização da linguagem JAVA favorece a expansão do software e o trabalho em equipe.

Como enunciado, o INSANE é um software orientado a objetos. Esta característica possibilita o tratamento de forma geral de entidades como função de forma, elemento finito, ponto de integração, modelo de análise, modelo constitutivo, entre outras (Penna, 2011).

O núcleo numérico do INSANE é estruturado pelas interfaces Model, Assembler e Solution (ver Fig. 5). Estas interfaces representam, respectivamente, o modelo discreto, o procedimento de montagem do sistema de equações e a obtenção dos resultados numéricos. A interface Persistence é responsável pelas operações de entrada e saída de dados, além da comunicação com o pré e o pós-processamento. (da Silva, 2012; da Fonseca, 2008)

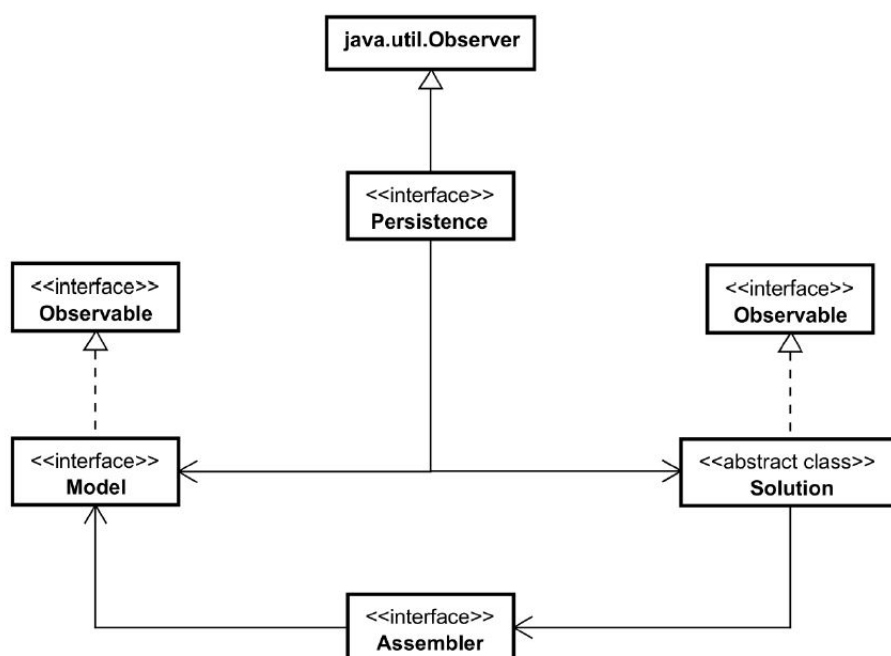


Figura 5: Núcleo Numérico do INSANE (da Silva, 2012)

A forma na qual é construída o INSANE torna possível a implementação de vários tipos de modelos discretos, tais como Método dos Elementos Finitos, Método dos Elementos Finitos Generalizados, Método dos Elementos de Contorno, Método sem Malha e suas variações (ver Fig. 6).

Conforme enunciado em (da Silva, 2012), a classe MfreeNode é derivada da classe Node do MEF (ver Fig. 7). Além dos atributos típicos do MEF, MfreeNode também armazena domínio de influência, função peso, funções de forma e suas derivadas.

O domínio de influência de um MfreeNode é caracterizado por sua geometria e tem a ele associada uma função peso. Conforme mostra a Fig. 8, os domínios de influência inseridos no INSANE por (da Silva, 2012) foram os domínios radiais e tensoriais. Cada domínio de

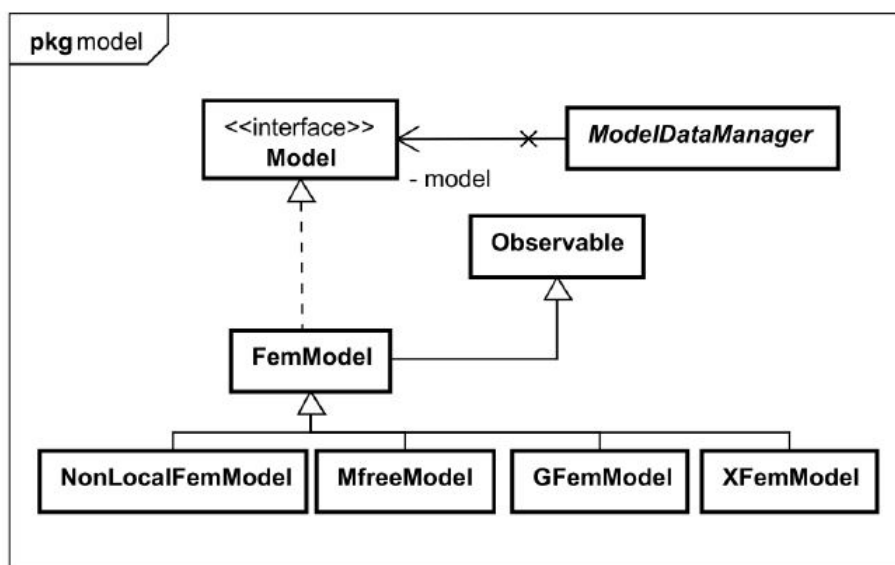


Figura 6: Pacote Modelo (da Silva, 2012)

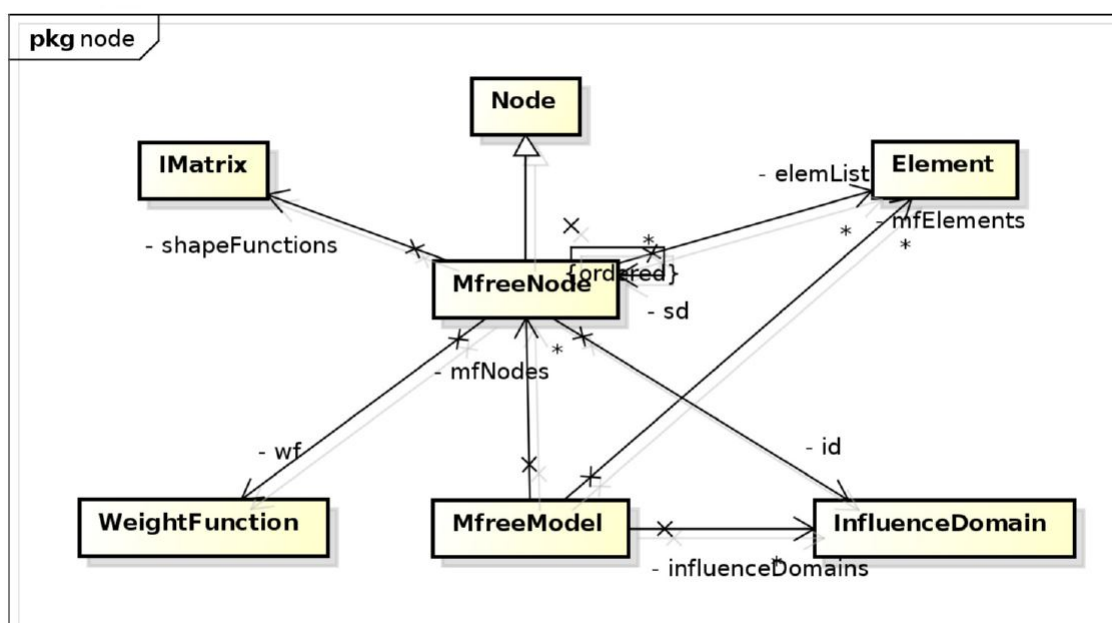


Figura 7: Pacote Nó (da Silva, 2012)

influência no INSANE deve derivar da Classe Geometry e implementar a Interface Influence-Domain. Diversos tipos de função peso podem ser associadas aos domínios radiais e tensoriais, são elas: função gaussiana, função bell shaped, função linear, entre outras.

6.1 IMPLEMENTAÇÃO DOS NOVOS RECURSOS

Neste trabalho, foi implementado no INSANE um novo tipo de InfluenceDomain, a Classe Polygonal. Esta nova definição de domínio de influência funciona com as funções peso de continuidade C^k e C^∞ também implementadas. A implementação de um novo tipo de domínio de influência para o Métodos das Nuvens hp partiu do princípio do emprego na integração

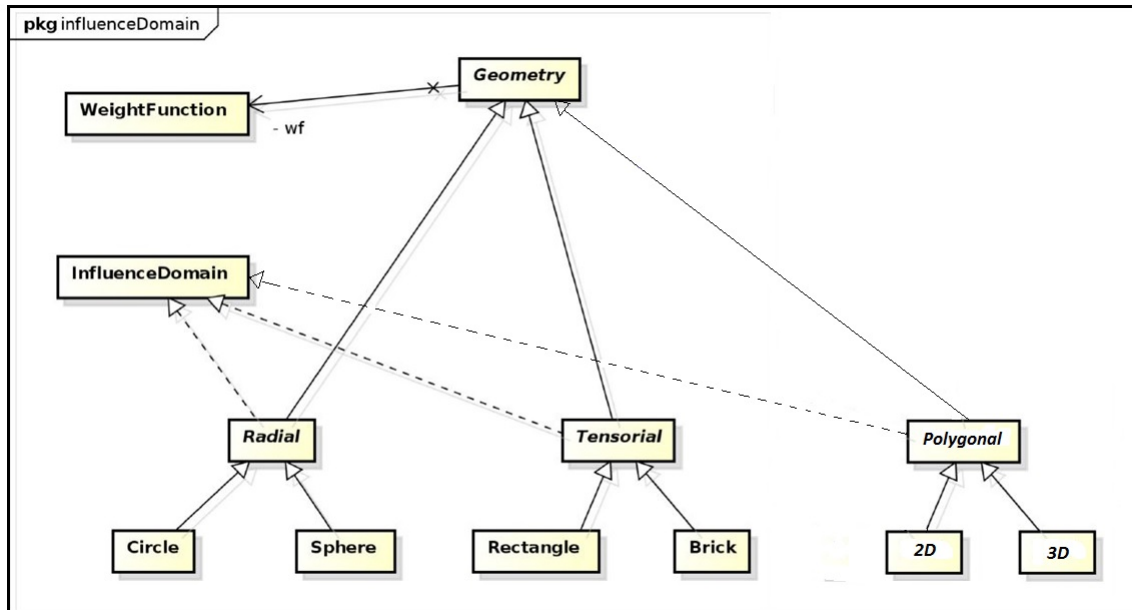


Figura 8: Domínios de Influência Existentes no INSANE e inclusão do domínio do tipo Poligonal (adaptado de (da Silva, 2012))

numérica de uma malha de células em segundo plano. No âmbito deste trabalho, especificamente, as células de integração empregadas são do tipo QuadrilateralCell. Da mesma forma de que no MEFG uma nuvem é formada pelos elementos que possuem um determinado nó em comum, no Método das Nuvens hp com o Domínio de Influência do tipo Polygonal, uma nuvem é formada pelas células de integração quadrilaterais que possuem um determinado nó em comum.

7 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Para validar os recursos implementados e exemplificar seu interesse, o problema da viga apresentado em (Lee and Bathe, 1993) é empregado. Trata-se de uma viga submetida à seguinte força de distribuição parabólica aplicada em sua extremidade:

$$q_y = \frac{120y}{L} - \frac{120y^2}{cL} \quad (32)$$

As reações de apoio são impostas como condições de contorno aplicando-se na face $x = 0$ a reação de cisalhamento no valor de $-q_y$ e de flexão através da seguinte distribuição:

$$q_x = \frac{240y}{c} - 120 \quad (33)$$

A estrutura encontra-se auto-equilibrada e os vínculos introduzidos servem apenas para eliminar os movimentos de corpo rígido.

As propriedades do material adotado, conforme aparecem em (Lee and Bathe, 1993), são:

- Módulo de Elasticidade $E = 1,0 \cdot 10^7 \text{ uf/uc}^2$;
- coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$;
- espessura $t = 1,0 \text{ uc}$;

onde $\text{uf} = (\text{unidades de força})$ e $\text{uc} = (\text{unidades de comprimento})$.

A Fig. 9 apresenta esquematicamente a viga analisada.

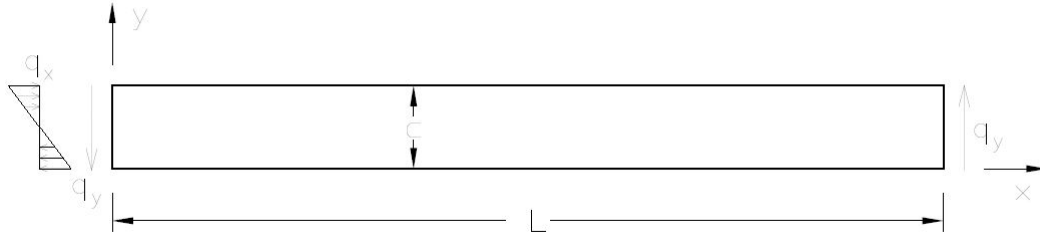


Figura 9: Geometria, sistema de eixos e carregamento da viga analisada - $L = 100\text{uc}$ e $c = 10\text{uc}$ (Barros, 2002)

Em (Lee and Bathe, 1993) são fornecidas as seguintes expressões analíticas para as funções de deslocamentos:

$$u_x = \frac{1}{E} \left(\frac{120}{cL} x^2 y - \frac{92}{cL} y^3 - \frac{60}{L} x^2 - \frac{240}{c} xy + \frac{138}{L} y^2 + 120x - \frac{46c}{L} y \right) \quad (34)$$

$$u_y = \frac{1}{E} \left(-\frac{40}{cL} x^3 - \frac{36}{cL} xy^2 + \frac{120}{c} x^2 + \frac{36}{L} xy + \frac{36}{c} y^2 + \frac{46c}{L} x - 36y \right) \quad (35)$$

A solução analítica $u_y = 0.008046\text{uc}$, foi obtida ao utilizar-se a implementação proposta com uma única célula de integração, quatro nós coincidentes com os vértices do domínio, enriquecimento do terceiro grau, ou seja, multiplicando a PU em cada nó por uma base de monômios capaz de representar qualquer polinômio com grau menor ou igual a 3. O método da penalidade para impor as condições de contorno. Embora o método da penalidade tenha sido utilizado, a construção do método com as funções C^k permite a aplicação direta das condições de contorno essenciais. Os novos recursos apresentados são validados na Figuras 10 e 11.

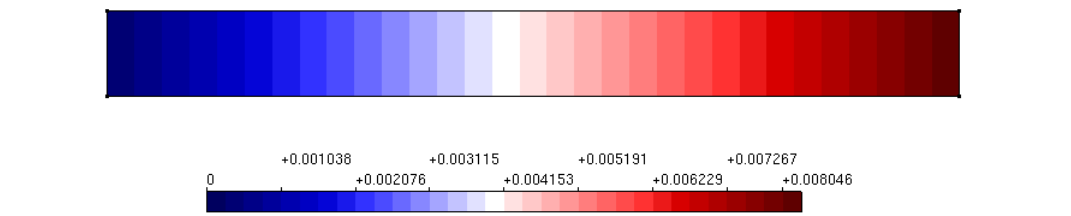


Figura 10: Deslocamento vertical u_y - 1 Célula - Enriquecimento do 3º grau

Com o objetivo de explorar as vantagens das funções de aproximação de elevada regularidade inseridas no INSANE neste trabalho, uma série de modelos do MEF e do Método das Nuvens hp C_k com quatro células de integração e com diversos graus de aproximação foi analisada. Nas terceira, quarta e quinta colunas da Tab. 1 são mostrados os resultados destas

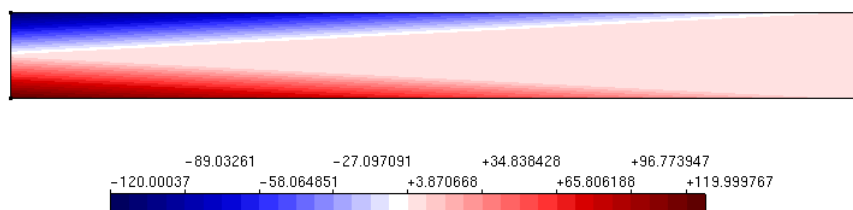


Figura 11: Componente de tensão normal na direção x , σ_{xx} - 1 Célula - Enriquecimento do 3º grau

análises em termos de deslocamento em y , energia de deformação e componente de tensão normal máxima $\sigma_{xx,max}$, respectivamente. A segunda coluna indica o grau da aproximação empregada. Para os modelos do MEFG, o grau da aproximação p corresponde a um enriquecimento até o grau $p - 1$. Para os modelos do Método das Nuvens hp, o grau da aproximação n corresponde a um enriquecimento até o grau p . O enriquecimento nestes casos significa multiplicar a PU em cada nó por uma base de monômios capaz de representar qualquer polinômio com grau menor ou igual a $p - 1$ para o MEFG e p para o Método das Nuvens hp C_k . A diferença de abordagem entre estes dois métodos está no fato de no primeiro a PU já ser linear. Sendo assim, para se obter uma aproximação de grau p , torna-se suficiente multiplicá-la por monômios de grau até $p-1$. Por outro lado, no Método das Nuvens hp C_k , a PU é racional e exige a multiplicação de monômios até a ordem p para se ter uma aproximação com esta característica.

Tabela 1: Resultados do MEFG e do Método das Nuvens C_k

Método	grau da aproximação	u_y	U	$\sigma_{xx,max}$
Solução Analítica	3	0.008046	0.08064	119.9997
MEFG	1	0.000756	0.00757	8.761408
MEFG	2	0.007702	0.07745	100.1411
MEFG	3	0.008046	0.08064	119.9997
Método das nuvens hp C_k	1	0.00316	0.03274	31.52400
Método das nuvens hp C_k	2	0.00780	0.07845	104.67309
Método das nuvens hp C_k	3	0.00804	0.08064	119.22664

As Figuras 12 a 17, a seguir, mostram a distribuição de tensão σ_{xx} para cada um dos modelos analisados. Por meio dessas imagens, é possível verificar que a aproximação do 1º grau, tanto no MEFG quanto no Método das Nuvens hp C_k , não é suficiente para representar adequadamente a solução do problema com o nível de discretização adotado. Entretanto, observa-se que o modelo de aproximação do 1º grau com as funções C_k apresenta resultados ligeiramente melhores em termos de deslocamentos e tensões máximos, além de apresentar distribuição de tensões contínua, ainda que incorreta.

As aproximações do 2º grau, mostradas nas Figuras 14 e 15, apresentam soluções de qualidade semelhante no que diz respeito aos deslocamentos. Entretanto, as tensões no modelo

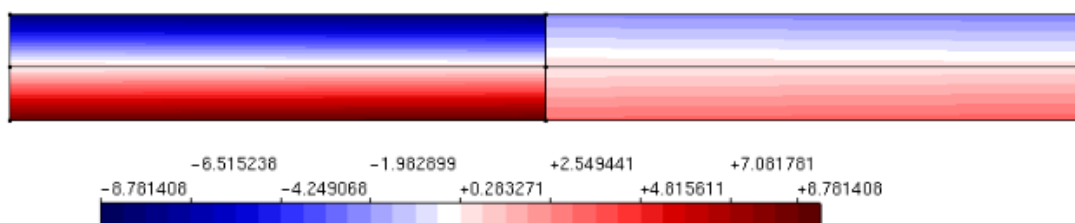


Figura 12: MEFG - Componente de tensão normal na direção x , σ_{xx} - 4 Células - Aproximação do 1º grau

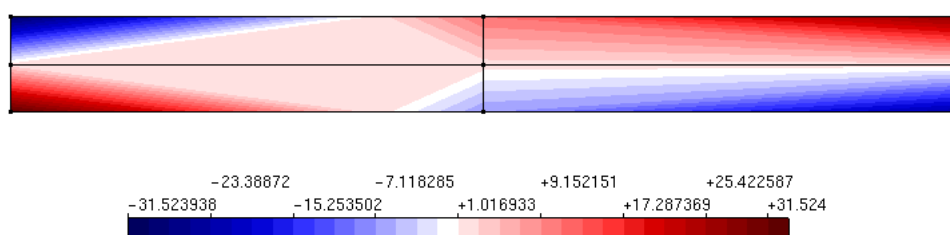


Figura 13: Método das nuvens hp C_k - Componente de tensão normal na direção x , σ_{xx} - 4 Células - Enriquecimento do 1º grau

do MEFG continuam descontínuas e inferiores às obtidas pelo Método das nuvens hp C_k . A continuidade das distribuições de tensão nos modelos com as funções C_k colocam em evidência a utilidade deste tipo de aproximação para análise não-linear física.

Ambos os modelos com aproximações do 3º grau deveriam ter soluções coincidentes com a solução analítica, como ocorre com o modelo do MEFG. Atribui-se o pequeno erro encontrado na solução do modelo com as funções C_k a erros advindos da integração numérica e utilização, para os Modelos do Método das Nuvens hp deste trabalho, do método da penalidade para aplicação das condições de contorno em deslocamentos.

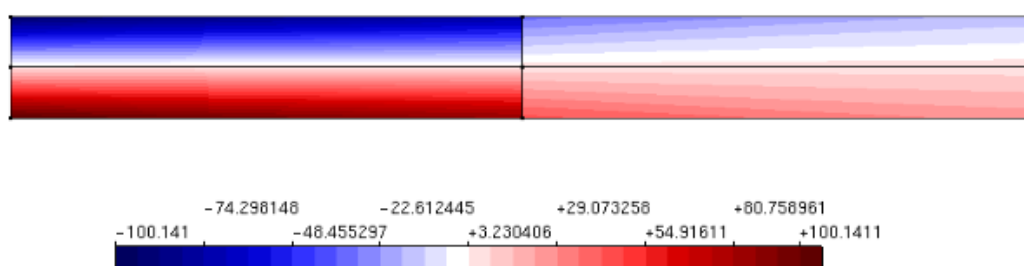


Figura 14: MEFG - Componente de tensão normal na direção x , σ_{xx} - 4 Células - Aproximação do 2º grau

8 CONCLUSÕES

Foram abordados conceitos importantes referentes à Partição da Unidade, às Funções de Shepard e às funções peso de elevada regularidade. São também abordadas as principais características do MMQM, do Método das Nuvens hp e do MEFG. Foram apresentados detalhes

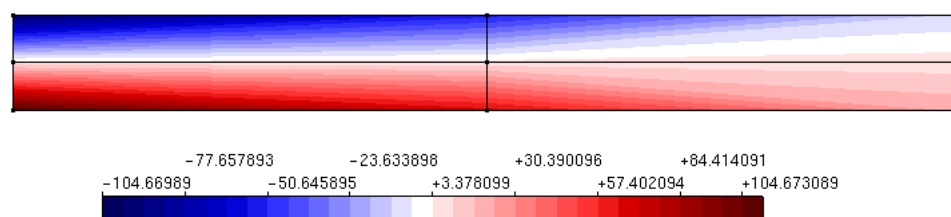


Figura 15: Método das nuvens hp C_k - Componente de tensão normal na direção x, σ_{xx} - 4 Células - Enriquecimento do 2º grau

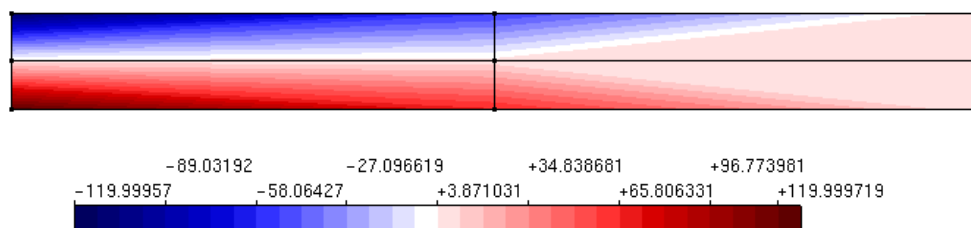


Figura 16: MEFG - Componente de tensão normal na direção x, σ_{xx} - 4 Células - Aproximação do 3º grau

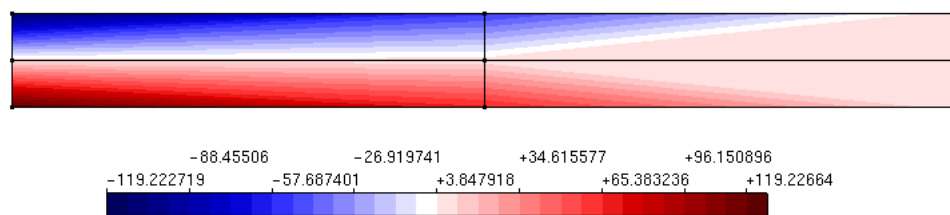


Figura 17: Componente de tensão normal na direção x, σ_{xx} - 4 Células - Enriquecimento do 3º grau

da implementação no INSANE de um novo tipo de domínio de influência para os métodos sem malha, em especial para o Método das Nuvens hp. Os novos recursos foram validados e sua utilidade para a análise fisicamente não-linear de estruturas foi evidenciada através dos diagramas de tensão contínuos obtidos por meio do emprego das funções de elevada regularidade.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o importante apoio das agências brasileiras de apoio à pesquisa CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - Financiamentos 309005/2013-2, 486959/2013-9 e 308785/2014-2) e FAPEMIG (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais” - pelo auxílio coletivo e Financiamento PPM-00669-15).

Referências Bibliográficas

- Alves, P. D., Pitangueira, R. L., et al., 2013. An object-oriented approach to the generalized finite element method. *Advances in Engineering Software*, vol. 59, pp. 1–18.
- Babuška, I., Caloz, G., & Osborn, J. E., 1994. Special finite element method for a classe of second order elliptic problems whith rough coefficients. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 31, n. 4, pp. 745–981.
- Babuška, I. & Melenk, J. M., 1997. The partition of unity method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 40, pp. 727–758.
- Barros, F. B., 2002. *Métodos Sem Malha e Métodos dos Elementos Finitos Generalizados em Análise Não-Linear de Estruturas*. Tese de doutorado, EESC - USP, São Carlos, SP, Brasil.
- Barros, F. B., de Barcellos, C. S., & Duarte, C. A., 2007. p-adaptive ck generalized finite element method for arbitrary polygonal clouds. *Computational Mechanics*, vol. 41, n. 1, pp. 175–187.
- Belytschko, T., Lu, Y., & Gu, L., 1994. Element-free Galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 37, pp. 229–256.
- da Fonseca, F. T., 2008. *Sistema computacional para análise dinâmica geometricamente não-linear através do método dos elementos finitos*. PhD thesis, Master's thesis, Universidade Federal de Minas Gerais.
- da Silva, R. P., 2012. *Análise não-Linear de Estruturas de Concreto por meio do Método Element Free Galerkin*. PhD thesis, Universidade Federal de Minas Gerais.
- Duarte, C. A., 1996. *The hp-cloud method*. Tese de doutorado, The University of Texas at Austin.
- Duarte, C. A., Babuška, I., & Oden, J., 2000. Generalized finite element methods for three-dimensional structural mechanics problems. *Computers & Structures*, vol. 77, pp. 215–232.
- Duarte, C. A., Kim, D.-J., & Quaresma, D. M., 2006. Arbitrarily smooth generalized finite element approximations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 196, pp. 33–56.
- Duarte, C. A., Migliano, D. Q., & Becker, E. D., 2004. A technique to combine meshfree- and finite element-based partition of unity approximationso. Technical report, University of Alberta. Report.

- Duarte, C. A. & Oden, J. T., 1995. Hp clouds - A meshless method to solve boundary-value problem. Technical report, TICAM, The University of Texas at Austin. Technical Report.
- Duarte, C. A. & Oden, J. T., 1996a. An h-p adaptive method using cloud. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 139, pp. 237–262.
- Duarte, C. A. & Oden, J. T., 1996b. H-p Clouds-An h-p Meshless Method. In *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, pp. 1–34. John Wiley & Sons, Inc.
- Edwards, H. C., 1996. C^∞ finite element basis functions. Technical Report 96-45, TICAM, The University of Texas at Austin.
- Freitas, A., 2015. *Modelos numéricos baseados em MEFG-Ck e MEFG-gl aplicados a problemas de elasticidade e plasticidade bidimensional*. PhD thesis, Universidade Federal de Santa Catarina.
- Lancaster, P. & Salkauskas, K., 1981. Surfaces generated by moving least squares methods. *Mathematics of Computation*, vol. 37, n. 155, pp. 141–158.
- Lee, N. S. & Bathe, K. J., 1993. Effects of element distortions on the performance of isoparametric elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 36, pp. 3553–3576.
- Melenk, J. M., 1995. *On Generalized Finite Element Methods*. Phd dissertation, University of Maryland, College Park.
- Melenk, J. M. & Babuška, I., 1996. The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 39, pp. 289–314.
- Oden, J. T., Duarte, C. A., & Zienkiewicz, O. C., 1998. A new cloud-based hp finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 153, pp. 117–126.
- Oden, J. T. & Reddy, J. N., 1976. *An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements*. Pure and Applied Mathematics. John Wiley & Sons, Inc.
- Penna, S., 2011. *Formulação Multipotencial para Modelos de Degradação Elástica: Unificação Teórica, Proposta de Novo Modelo, Implementação Computacional e Aplicações a Estruturas de Concreto*. PhD thesis, Universidade Federal de Minas Gerais.
- Shapiro, V., 1991. Theory of R-functions and applications: a primer. Technical Report TR91-1219, Computer Science Department, Cornell University.
- Shepard, D., 1968. A two-dimensional function for irregularly spaced data. In *ACM National Conference*, pp. 517–524.