



SISTEMA COMPUTACIONAL ORIENTADO A OBJETOS PARA ANÁLISES ACOPLADAS TERMO-ESTRUTURAIS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Guilherme Garcia Botelho

guilhermebotelhofmg@gmail.com

Roque Luiz da Silva Pitangueira

roque@dees.ufmg.br

Flavio Torres da Fonseca

flaviotf@gmail.com

Departamento de Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)
Avenida Antônio Carlos 6627, 31270-901, Belo Horizonte, MG, Brasil

Resumo. *O presente trabalho se refere à inclusão de novas funcionalidades ao sistema computacional livre INSANE - Interactive Structural Analysis Environment – para o tratamento do problema da transferência de calor (PTC) e de problemas termo-estruturais (PTE) da mecânica dos sólidos, ambos abordados segundo o Método dos Elementos Finitos (MEF). As novas funcionalidades possibilitam tanto o cálculo de campos de temperaturas em análises térmicas, como a inclusão do efeito da expansão/contração do material em análises da mecânica dos sólidos. A implementação do PTC no INSANE concentrou-se em caracterizar as variáveis envolvidas, realizar o cálculo da influência de cada subdomínio no comportamento global do modelo e definir as diretrizes para o equacionamento do problema físico. O acoplamento termo-estrutural foi abordado com a elaboração de métodos para o cálculo do carregamento nodal equivalente devido à variação de temperatura prescrita, e rotinas para o cálculo das tensões quando há a influência da variação de temperatura. Testes validaram a expansão do programa a partir da comparação das soluções numéricas com as soluções analíticas correspondentes, tanto para o PTC como para o PTE.*

Palavras chave: *Análise térmica, Análise termo-estrutural, Método dos elementos finitos, Sistema INSANE*

1 INTRODUÇÃO

Em muitas aplicações práticas, equipamentos e estruturas são submetidos durante o ciclo operacional a variações de temperatura, que em geral são decorrentes dos processos físicos associados à finalidade dos equipamentos e das estruturas, como também às características do ambiente ao qual estão expostos.

Podem-se citar como exemplos os equipamentos envolvidos no transporte de metal líquido na indústria siderúrgica, como painéis e carros torpedo, fornalhas para geração de gás quente, tubulações de vapor, e outros.

A variação de temperatura promove uma mudança geométrica nos corpos sólidos, caracterizada pela deformação térmica, que na maioria dos casos é acompanhada pela alteração do nível de sollicitação estrutural pela introdução de tensões térmicas.

Segundo Incropera et al. (2011), o conhecimento do campo de temperaturas e da resposta estrutural a essa variação térmica em corpos sólidos é de grande importância para o desenvolvimento de projetos eficientes e seguros, visto que permite, por exemplo, otimizar a espessura de peças construídas com materiais refratários bem como verificar a integridade estrutural para condições fiéis à condição real de operação.

A área do conhecimento relacionada ao estudo do comportamento estrutural de corpos sólidos submetidos simultaneamente a variações de temperatura e a esforços mecânicos ao longo de seu domínio é denominada Termoelasticidade. Conforme descrito por Hetnarski (2009), o desenvolvimento da termoelasticidade se iniciou em 1835 com uma publicação de J.M.C. Duhamel contendo formulações de problemas de valor de contorno, bem como a derivação de equações para o acoplamento entre o campo de temperaturas e o campo de deformações em um corpo.

Todavia, a obtenção dos campos de temperaturas nos Problemas de Transferência de Calor (PTC) e dos campos de tensões nos Problemas de Termoelasticidade (PTE) não é trivial, podendo ser até impossível através de métodos analíticos em situações em que a geometria do corpo é complexa, sendo necessário recorrer a soluções aproximadas obtidas por métodos numéricos como o Método dos Elementos Finitos (MEF).

O MEF consiste na discretização do meio contínuo em subdomínios interconectados, denominados Elementos Finitos, o que permite obter soluções aproximadas de problemas regidos por equações diferenciais parciais por meio de sistemas de equações algébricas.

Como característica intrínseca do MEF, a qualidade da aproximação, em geral, está relacionada ao grau de refino da discretização, de forma que nos casos de aplicação prática normalmente é necessário resolver sistemas com um número elevado de equações, o que justifica a implementação computacional do método.

A implementação computacional aqui apresentada foi realizada no ambiente INSANE (*INteractive Structural ANalysis Environment*), um software de código livre para solução de modelos discretos do MEF, em desenvolvimento no Departamento de Engenharia de Estruturas da UFMG. Como este software está sendo desenvolvido segundo o Paradigma da Programação Orientada a Objetos (POO) e possui seu núcleo numérico segmentado e independente das interfaces gráficas de pré e pós-processamento, a adição de novas funcionalidades ao sistema pôde ser feita apoiando-se nas implementações já existentes.

LISTA DE SÍMBOLOS

$E_{ent}, E_{sai}, E_{ger}, E_{acu}$	Energias que entram, saem, são geradas e são acumuladas no volume de controle;
ϕ, Q	Potencial e Termo fonte
T	Temperatura;
[N]	Matriz das funções de interpolação;
{t}	Vetor de temperaturas nodais
{g}	Vetor dos gradientes de temperatura;
[D]	Matriz constitutiva;
k_x, k_y, k_z, k_r	Condutividades térmicas nas direções cartesianas x, y e z e radial;
π	Funcional referente à energia térmica;
q^*	Fluxo de calor prescrito em superfície do contorno;
h, T_∞	Coefficiente convectivo e temperatura do fluido.
[L]	Operador de derivadas;
{f _Q }, {f _q }, {f _h }	Vetores de carga nodal equivalente à geração de calor, a fluxo de calor prescrito e à troca de calor por convecção;
[C],[B],[A], {X}	Matrizes dos coeficientes da variável de estado, da sua primeira e da sua segunda derivadas, e vetor da variável de estado.
{N _{load} }, {E}, {F}	Vetor de carga aplicada nos nós, vetor de carregamento nodal equivalente aos esforços aplicados nos elementos fora dos nós e vetor de carregamentos equivalentes devidos aos esforços internos;
{ ϵ_0 }, { ϵ_0^{temp} }	Vetores de deformações iniciais prescritas e de deformações iniciais devido à variação de temperatura;
{ f_{eq}^0 }	Vetor de cargas nodais equivalente às deformações iniciais;
$T_{esq}, T_{dir}, L_{barra}, A_{seção}$	Temperatura nas extremidades esquerda e direita, comprimento e área da seção da barra;
E, ν , α	Módulo de elasticidade, coeficientes de Poisson e de expansão térmica.
σ, P	Tensão e esforço normal;
$T_{int}, T_{ext}, r_{int}, r_{ext}$	Temperaturas e raios das faces interna e externa;
r, u_r	Posição e deslocamento na direção radial;
$\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}$	Tensões normais nas direções radial, circunferencial e axial;
$T_{sup}, T_{inf}, L_{viga}, h_{viga}$	Temperaturas nas faces superior e inferior, altura e comprimento da viga.
I_z, M_z	Inércia e momento fletor em torno do eixo cartesiano z;

2 PROBLEMA DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR

2.1 Formulação geral do PTC

Como detalhadamente descrito por Incropera et al. (2011), a transferência de calor é a energia térmica em trânsito devido a uma diferença de temperaturas. Este processo deve atender à Primeira Lei da Termodinâmica e ocorre na natureza em três modos distintos: condução, convecção e radiação térmica.

Segundo a Primeira Lei da Termodinâmica aplicada ao PTC, o balanço de energia em um volume de controle, desprezando o trabalho realizado pelo sistema, é descrito por.

$$E_{ent} - E_{sai} + E_{ger} - E_{acu} = 0. \quad (1)$$

O desenvolvimento aqui apresentado se concentrou na implementação do PTC para problemas em regime permanente, de forma que $E_{acu} = 0$. Além dessa consideração, o transporte de energia por advecção nas fronteiras do volume de controle também foi desprezado, visto o objetivo deste estudo é complementar a solução de problemas da mecânica dos sólidos levando em conta o efeito da variação de temperatura.

Segundo Zienkeiwicz et al. (2000) o PTC é parte integrante da Teoria do Potencial, onde ϕ é um potencial e cuja equação governante é:

$$\nabla^T (-k \nabla \phi) + Q = 0. \quad (2)$$

No caso particular da Transferência de Calor, o potencial ϕ é a temperatura, e a equação para o problema no meio contínuo é a Lei de Fourier.

2.2 Formulação do PTC pelo MEF

O Método dos Elementos Finitos se baseia na subdivisão do domínio do problema (Meio Contínuo) em subdomínios interconectados (Elementos Finitos). Os vértices do espaço geométrico definido pelo subdomínio, ou Elemento Finito, são denominados Nós e neles é realizada a avaliação do valor da variável de estado, neste caso a Temperatura, e o balanço de energia descrito pela Primeira Lei da Termodinâmica deve ser atendido nos mesmos.

A distribuição de temperaturas no interior dos Elementos Finitos é obtida de forma aproximada a partir de uma interpolação do valor que a variável de estado assume em cada um dos nós do subdomínio por funções específicas pré-determinadas. Segundo Logan et al. (2002), pode-se escrever na forma matricial, onde $[N]$ é a matriz das funções interpoladoras e $\{t\}$ é o vetor contendo os valores de temperatura em cada um dos nós do elemento finito:

$$T = [N] \{t\}. \quad (3)$$

Os gradientes de temperatura podem ser armazenados em um vetor, como:

$$\{g\} = \left\{ \frac{\partial T}{\partial x} \quad \frac{\partial T}{\partial y} \quad \frac{\partial T}{\partial z} \right\}^T. \quad (4)$$

Os coeficientes de condutividade térmica do material, na forma matricial:

$$[D] = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix}. \quad (5)$$

A formulação do MEF para o PTC, desconsiderando a troca de calor por radiação, é obtida a partir da minimização do funcional (ver Fig. 1):

$$\pi = \frac{1}{2} \iiint_V [\{g\}^T [D] \{g\}] dV - \iiint_V \{t\}^T [N]^T Q dV - \iint_{S_2} \{t\}^T [N]^T q^* dS + \frac{1}{2} \iint_{S_1} h \left[\{t\}^T [N]^T - T_\infty \right]^2 dS \quad (6)$$

Após a minimização, tem-se:

$$\left[\iiint_V ([L][N])^T [D] ([L][N]) dV + \iint_{S_3} h [N]^T [N] dS \right] \{t\} = \{f_Q\} + \{f_q\} + \{f_h\}, \quad (7)$$

onde:

$$\{f_Q\} = \iiint_V [N]^T Q dV, \quad \{f_q\} = \iint_{S_2} [N]^T q^* dS, \quad \{f_h\} = \iint_{S_3} [N]^T h T_\infty dS \quad (8)$$

As superfícies do contorno do elemento, S2 e S3 estão indicadas esquematicamente na Figura 1, que representa um elemento finito genérico utilizado para a solução de problemas de transferência de calor.

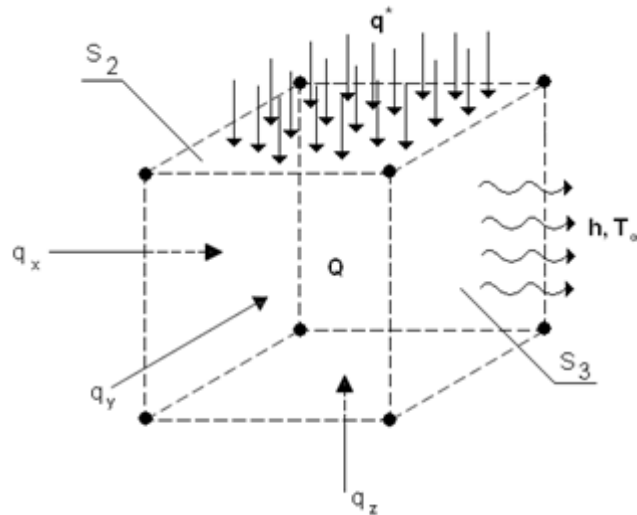


Figura 1. Elemento Finito – Fluxos de calor condutivos e condições de contorno em S2 e S3.

Os termos entre colchetes à esquerda da igualdade da Eq. (7) representam a parcela condutiva, sendo que o segundo termo somente existe nas situações em que há transferência de calor por convecção prescrita na superfície S3 de contorno do Elemento Finito. Os vetores à direita da igualdade correspondem aos carregamentos térmicos que atuam no Elemento Finito.

3 FORMULAÇÃO DO PTE PELO MEF

O Problema Termo Estrutural consiste em um problema da Mecânica dos Sólidos no qual o corpo é submetido a variações de temperatura, que também podem ser acompanhadas de

solicitações estruturais. As variações de temperatura introduzem deformações térmicas no corpo, que podem ser tratadas como um campo de deformações iniciais em um problema convencional da mecânica dos sólidos. Estas deformações iniciais, por sua vez, se somam às componentes de deformação oriundas dos esforços mecânicos aplicados ao corpo.

Visando a proporcionar um maior grau de abstração, foram incluídos dois novos tipos de carregamentos no INSANE: deformações iniciais prescritas e variação de temperatura.

Quanto à obtenção do carregamento nodal equivalente, observou-se que o cálculo para carregamentos de deformação inicial, e conseqüentemente para os carregamentos de variação térmica, é diferente do cálculo dos demais carregamentos da mecânica dos sólidos. Esta diferença está ilustrada nas equações 9 e 10 para o caso de carregamentos aplicados em um domínio volumétrico do elemento finito.

$$f_{eq}^b = \iiint_{V_e} [N]^T \{b\} dV \quad (9)$$

$$f_{eq}^{\varepsilon^0} = \iiint_{V_e} ([L][N])^T [D] \{\varepsilon_0\} dV \quad (10)$$

Devido a esta diferença, a implementação do PTE neste trabalho consistiu principalmente na criação de rotinas que descrevem e que calculam os carregamentos nodais equivalentes decorrentes de deformações iniciais prescritas e de variações de temperatura, e se restringiu até o presente momento ao estudo de materiais elásticos e isotrópicos. Nestes materiais, a variação térmica somente introduz deformações lineares não ocorrendo, portanto, deformações angulares.

4 SISTEMA INSANE

O Sistema Computacional Orientado a Objetos denominado INSANE – *Interactive Structural ANalysis Environment* é um programa de computador livre para a análise de problemas de engenharia, e conta com uma ampla biblioteca para a solução destes problemas a partir de técnicas como o MEF e suas variações (Alves et. al, 2013).

O código fonte é escrito na linguagem JAVA e sua contínua expansão é realizada no Departamento de Engenharia de Estruturas da Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG. O sistema foi concebido de forma segmentada e genérica, o que permite a inclusão de novas funcionalidades com mínimas alterações no código já existente (Fonseca, 2008).

O INSANE é constituído de três grandes aplicações: pré-processador e pós-processador, que são respectivamente aplicações gráficas interativas que disponibilizam ferramentas para a elaboração de modelos computacionais e visualização de resultados, e processador, que é um núcleo numérico responsável pela solução dos problemas modelados no pré-processador. A persistência dos dados, para a comunicação entre essas aplicações, é realizada por arquivos de texto escritos na eXtensible Markup Language – XML (W3C, 2015).

Com o objetivo de contextualizar as alterações realizadas no código fonte do INSANE para a inclusão de funcionalidades referentes ao PTC e ao PTE, uma visão geral do programa será apresentada a seguir com o auxílio de diagramas UML (OMG, 2015).

4.1 Visão geral

Conforme detalhado por Fonseca (2008), o núcleo numérico é composto pelas classes *Model* e *Solution*, e pelas interfaces *Persistence* e *Assembler* (Fig. 2).

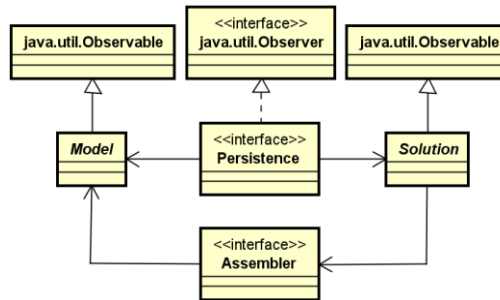


Figura 2. Organização geral do núcleo numérico do sistema computacional INSANE.

A classe *Model* contém as informações relativas ao modelo computacional preenchidas na etapa de pré-processamento. Esta classe possui as listas dos nós, elementos, carregamentos e materiais, bem como referências à descrição do modelo de análise em questão e ao objeto responsável pelo cálculo da contribuição de cada elemento à solução.

A interface *Assembler*, a partir da consulta à classe *Model*, monta o sistema de equações matricial de segunda ordem genérico descrito na Equação 9, que representa matematicamente o problema a ser resolvido.

$$[A]\{\ddot{X}\} + [B]\{\dot{X}\} + [C]X = \{N_{load}\} + \{E\} - \{F\}. \quad (11)$$

A classe *Solution* é responsável por iniciar e conduzir a solução do sistema de equações elaborado pela interface *Assembler*, e a interface *Persistence* trata os dados de entrada e se comunica com as classes *Model* e *Solution* propagando quaisquer alterações no modelo, de forma a manter os dados utilizados por essas classes sempre atualizados.

4.2 Modificações realizadas no código

4.2.1 Alterações para o tratamento do PTC

Foi necessário criar cinco novas classes e alterar cinco métodos em classes existentes do sistema computacional INSANE para o tratamento de Problemas da Transferência de Calor em regime estacionário pelo MEF.

Uma das novas classes foi derivada da classe *ProblemDriver*, que é a classe responsável por calcular a contribuição de cada elemento finito. A nova classe contém os métodos necessários para o cálculo da matriz de condução do elemento e dos vetores de carregamentos associados a este elemento. Esta classe foi nomeada *HeatTransferPD*, e está destacada no diagrama UML da Figura 3.

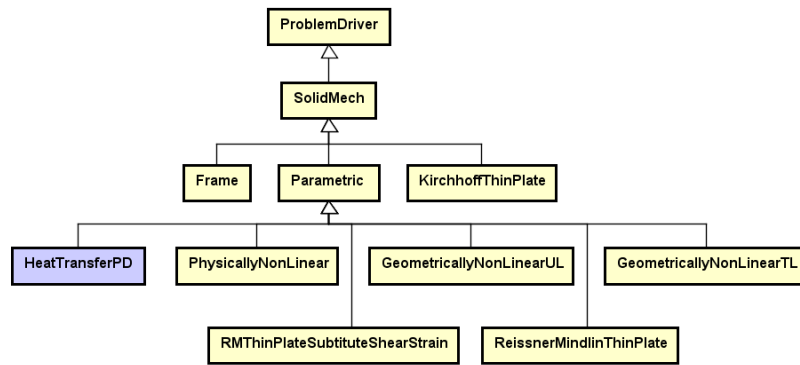


Figura 3. Diagrama de classes da expansão da classe *ProblemDriver*.

A classe *HeatTransferPD* estendeu diretamente da classe *Parametric*, de forma a minimizar a repetição de código e a agregar as funcionalidades para o processamento de modelos constituídos por elementos finitos paramétricos (Weaver, 1984).

As outras quatro classes adicionadas ao núcleo numérico foram derivadas da classe *AnalysisModel*, que é responsável por fornecer as informações relativas ao tipo de problema físico modelado. As novas classes contêm métodos de acesso às informações inerentes a uma análise térmica uni, bi, ou tridimensional pelo MEF sendo nomeadas *HeatTransferAM*, a superclasse, e suas derivadas *HeatTransfer_1D*, *HeatTransfer_2D* e *HeatTransfer_3D*. Estas classes estão destacadas na Figura 4.

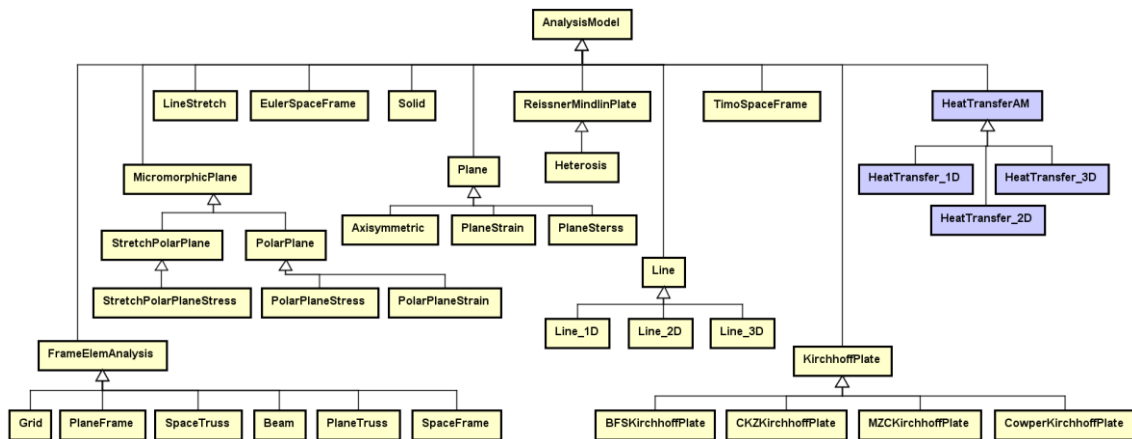


Figura 4. Diagrama de classes da expansão da classe *AnalysisModel*.

Quanto às modificações nas classes existentes, foram realizadas alterações nas classes que gerenciam a persistência de dados e na classe *Solution*, no método que inicia e controla o processo de solução para que a montagem dos vetores de carregamento seja realizada antes da montagem da matriz de condução uma vez que, na presença de carregamentos convectivos, deve-se incluir uma componente na matriz de condução associada a esses carregamentos.

4.2.2 Alterações para o tratamento do PTE

No INSANE existem classes separadas para armazenar as informações relativas ao carregamento e para calcular o vetor de cargas nodais equivalentes associadas ao mesmo, sendo necessária, portanto, a expansão nessas duas partes do núcleo numérico como será descrito a seguir.

As classes que armazenam as informações relativas aos carregamentos estendem da superclasse *ElementLoad*, enquanto as classes que realizam o cálculo do vetor de cargas nodais equivalentes estendem da superclasse *EquivalentNodalValue*.

Como no INSANE os carregamentos podem ser aplicados sobre uma linha, ou sobre uma superfície ou em uma região volumétrica de um elemento finito, foram criadas classes separadas para armazenarem as informações relativas a cada um dos dois novos tipos de carregamentos em cada um dos três modos de aplicação, resultando nas seis novas classes herdeiras de *ElementLoad* destacadas na Figura 5.

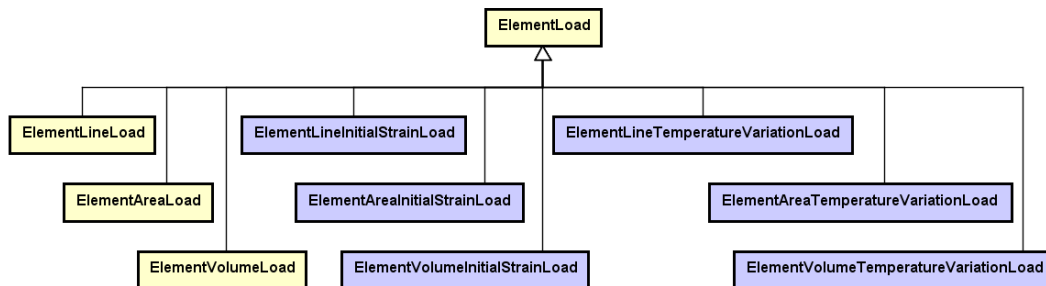


Figura 5. Diagrama de classe da expansão da classe *ElementLoad*.

Para a representação de carregamentos de deformações iniciais prescritas tornou-se necessário criar a classe *InitialStrainEquivalentNodalValue*, que sobrescreve o método responsável pelo cálculo dos carregamentos nodais equivalentes da superclasse *EquivalentNodalValue*.

A classe *TemperatureVariationEquivalentNodalValue* foi criada como uma extensão da classe *InitialStrainEquivalentNodalValue* para incluir as particularidades do cálculo do vetor de deformações iniciais no caso de carregamentos de variação de temperatura.

A expansão do INSANE referente ao cálculo dos vetores de cargas nodais equivalentes para carregamentos de deformação inicial prescrita e de variação de temperatura resultou na criação das oito classes destacadas na Figura 6.

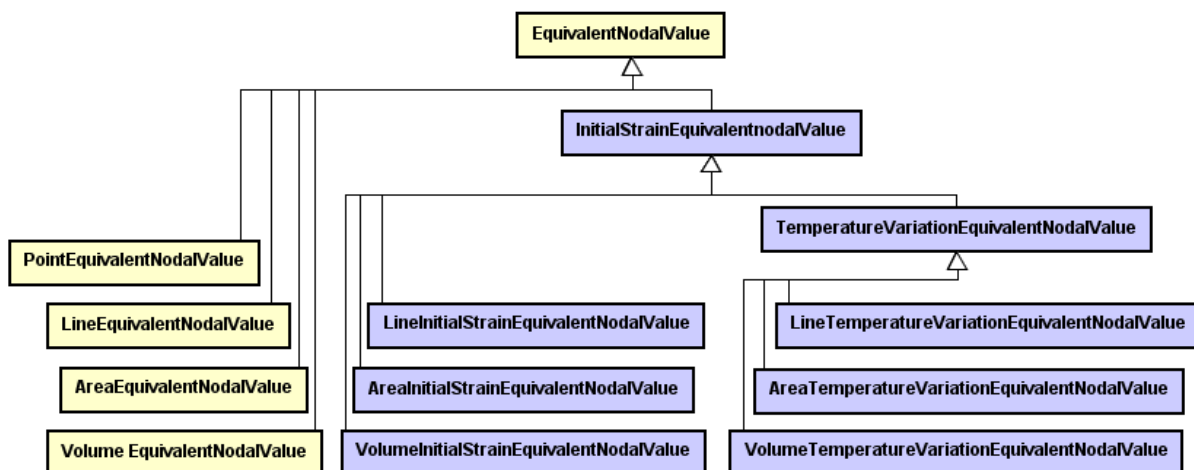


Figura 6. Diagrama de classe da expansão da classe *EquivalentNodalValue*.

Além da criação de classes para a representação dos novos carregamentos e para a descrição da rotina de cálculo dos vetores de carregamentos nodais equivalentes, foram realizadas alterações no método responsável pelo cálculo das tensões para contemplar a subtração das

deformações iniciais, e nos modelos de análise, que passaram a informar as componentes de deformação que são afetadas pela variação de temperatura.

Em relação ao reconhecimento, manipulação e armazenamento dos novos carregamentos inseridos no INSANE, também foram necessárias modificações em métodos já existentes no programa. Ressalta-se que as modificações realizadas não comprometeram o grau de generalidade do INSANE.

5 VALIDAÇÃO

A comparação entre as soluções obtidas pelo MEF utilizando a plataforma INSANE e as respectivas soluções analíticas dos problemas termoestruturais foi realizada para os elementos paramétricos uni, bi e tridimensionais aplicáveis aos modelos de análise de Pórtico, Estado Plano de Tensão (EPT), Estado Plano de Deformação (EPD), Axissimétrico e Sólido.

As distribuições de temperaturas, utilizadas como carregamento nas análises termoestruturais, foram obtidas de análises térmicas realizadas com a nova funcionalidade do INSANE para os respectivos modelos uni, bi e tridimensionais.

5.1 Elementos finitos unidimensionais

Para a validação das soluções obtidas de modelos elaborados com elementos finitos unidimensionais, utilizou-se como referência a solução analítica da deformação axial de uma barra de 100 mm de comprimento x 10 mm de largura x 10 mm de altura, Figura 7.

Esta barra foi submetida a uma variação de temperatura linear ao longo de seu comprimento, sendo a variação nula na extremidade esquerda e 100°C na extremidade direita. O material considerado foi Aço com módulo de elasticidade 210 GPa e coeficiente de expansão térmica 1.2×10^{-5} mm/mm/°C.

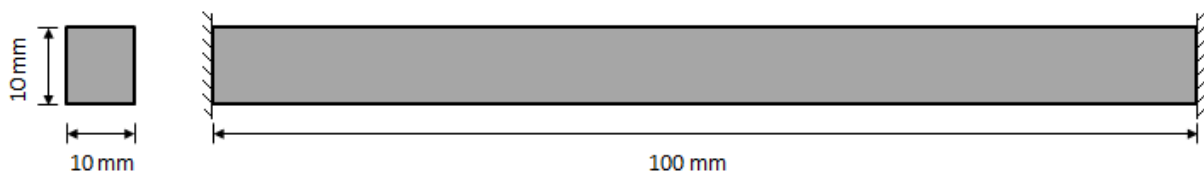


Figura 7. Barra submetida à variação de temperatura ao longo do comprimento.

Conforme descrito por Incropera et. al. (2001), o caso unidimensional da Lei de Fourier é dada por:

$$\frac{d}{dx} \left(k_x \frac{dT}{dx} \right) = 0, \quad (12)$$

cuja solução quando a condutividade térmica é constante e as condições de contorno são temperaturas conhecidas nas extremidades, é dada por:

$$T(x) = (T_{dir} - T_{esq}) \frac{x}{L_{barra}} + T_{esq}. \quad (13)$$

Substituindo o comprimento da barra e as temperaturas prescritas nas extremidades, tem-se:

$$T(x) = \frac{100^\circ C \cdot x}{100mm} \quad [^\circ C]. \quad (14)$$

Seja δ o acréscimo de comprimento que a variação da temperatura introduziria caso a barra estivesse livre para deslocar em suas extremidades:

$$\delta = \int_0^{L_{barra}} \varepsilon_0^{temp}(x) dx = \int_0^{100} \alpha \cdot T(x) dx = 1.2 \times 10^{-5} \frac{mm}{mm \cdot ^\circ C} \left[\frac{100^\circ C \cdot x^2}{2 \cdot 100mm} \right]_{0mm}^{100mm} = 6 \times 10^{-2} mm. \quad (15)$$

A tensão de compressão constante ao longo da barra devido ao impedimento do deslocamento nas extremidades é calculada como:

$$\sigma(x) = \frac{-\delta \cdot E}{L_{barra}} = \frac{-6 \times 10^{-2} mm \cdot 210000 MPa}{100mm} = -126 MPa. \quad (16)$$

As reações de apoio são:

$$P(x) = \sigma(x) \cdot A_{seção} = -126 MPa \cdot 100mm^2 = 12600 N. \quad (17)$$

A barra bi-engastada foi modelada utilizando um elemento finito unidimensional paramétrico. A análise térmica para a obtenção da distribuição de temperaturas foi realizada utilizando o modelo de análise de condução de calor unidimensional, e a análise estrutural foi realizada utilizando o modelo de análise de Pórtico.

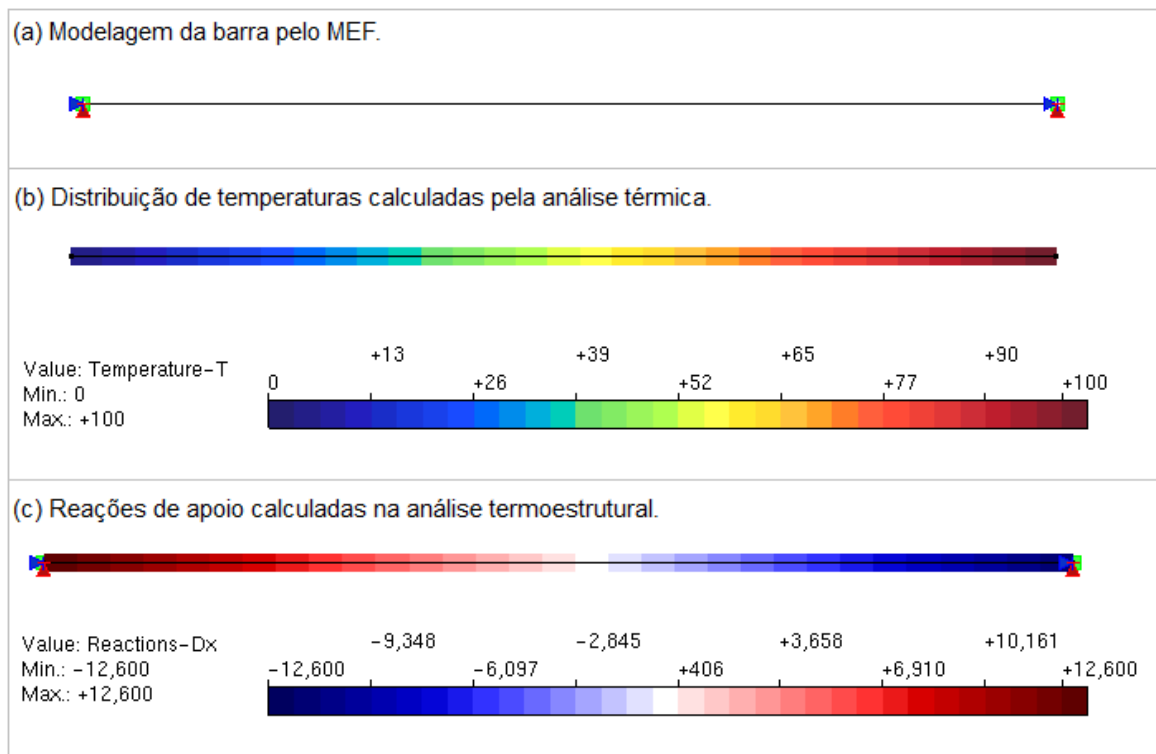


Figura 8. Modelagem da barra aquecida e solução do problema utilizando o INSANE.

Tanto a solução do PTC como a solução do PTE se igualaram à solução analítica do problema, validando as novas ferramentas para modelos unidimensionais.

5.2 Elementos finitos bidimensionais

Para a validação das soluções obtidas por modelos de elementos finitos bidimensionais, foram utilizados três problemas de referência, sendo o primeiro um disco aquecido, o segundo um cilindro longo aquecido e o terceiro uma viga com variação linear de temperatura ao longo da altura.

Devido à característica de simetria dos dois primeiros problemas, eles também podem ser tratados como sólidos de revolução, que são modelados com elementos planos utilizando um modelo de análise Axissimétrico.

Os problemas bidimensionais acima mencionados serão descritos nos itens a seguir, sendo apresentadas, para cada problema, primeiramente sua solução analítica e em seguida os resultados das simulações computacionais pelo MEF utilizando os novos recursos implementados na plataforma INSANE.

5.2.1 Disco aquecido

O disco de aço com furo central mostrado na Figura 9, cujo diâmetro interno é 150 mm, o diâmetro externo é 200 mm e a espessura é 5 mm está submetido a um aumento de temperatura na sua face interna de 20°C, enquanto a face externa é submetida a um aumento de 10°C. O coeficiente de expansão térmica é 1.2×10^{-5} mm/mm/°C.

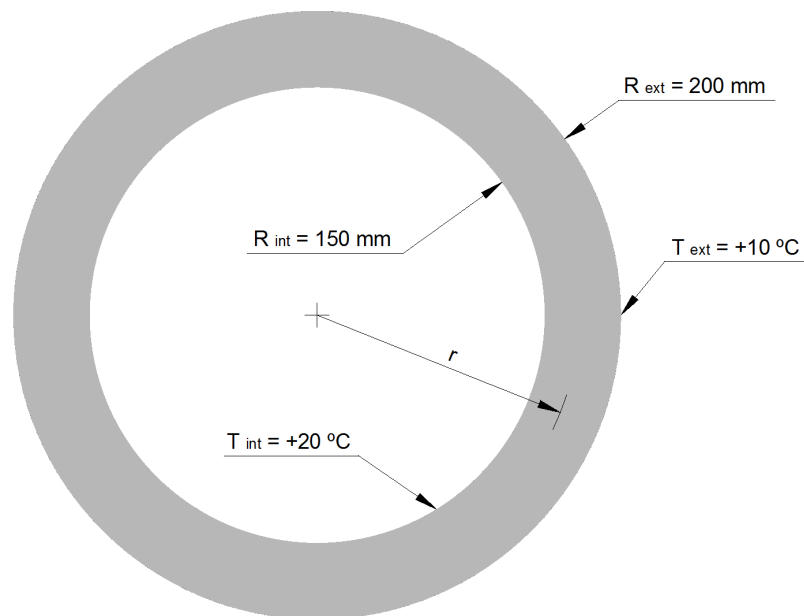


Figura 9. Disco com temperaturas prescritas nas faces interna e externa.

Conforme descrito por Incropera (2011), o cálculo da distribuição de temperaturas no disco pode ser tratado como um problema unidimensional em um sistema de coordenadas cilíndrico. Neste caso, a Lei de Fourier é expressa como:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(k_r \cdot r \cdot \frac{dT}{dr} \right) = 0, \quad (18)$$

cujas soluções obtidas por integração, para o caso de condutividade térmica constante e condições de contorno de temperaturas conhecidas nas faces interna e externa, é dada por:

$$T(r) = \frac{(T_{int} - T_{ext})}{\ln\left(\frac{r_{int}}{r_{ext}}\right)} \ln\left(\frac{r}{r_{ext}}\right) + T_{ext} \quad (19)$$

Conhecida a variação da temperatura ao longo do domínio, $T(r)$, e sabendo que o problema pode ser tratado como um Estado Plano de Tensão (EPT), o deslocamento radial e as tensões radiais e circunferenciais, segundo descrito por Hetnarski (2009), são dados por:

$$u_r^{EPT} = \frac{(1+\nu)\alpha}{r} \int_{r_{int}}^r T(r)rdr + \frac{(1+\nu)r_{int}^2 + (1-\nu)r^2}{(r_{ext}^2 - r_{int}^2) \cdot r} \cdot \alpha \int_{r_{int}}^{r_{ext}} T(r)rdr. \quad (20)$$

$$\sigma_{rr}^{EPT} = -\frac{E\alpha}{r^2} \int_{r_{int}}^r T(r)rdr + \frac{E\alpha}{(r_{ext}^2 - r_{int}^2)} \left(1 - \frac{r_{int}^2}{r^2}\right) \cdot \int_{r_{int}}^{r_{ext}} T(r)rdr. \quad (21)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{EPT} = \frac{E\alpha}{r^2} \int_{r_{int}}^r T(r)rdr - E\alpha\theta + \frac{E\alpha}{(r_{ext}^2 - r_{int}^2)} \left(1 + \frac{r_{int}^2}{r^2}\right) \cdot \int_{r_{int}}^{r_{ext}} T(r)rdr. \quad (22)$$

Devido à simetria do problema, somente um setor correspondente a um quarto do disco foi modelado. A escolha de um setor de 90° se deve à maior facilidade para a aplicação das condições de contorno.

A distribuição de temperaturas obtida pelo INSANE está mostrada na Figura 10, à esquerda, e a comparação entre as temperaturas obtidas pelo MEF com a solução analítica do problema está mostrada no gráfico à direita, também na Figura 10. Pode-se notar que a solução numérica convergiu para a solução analítica do problema.

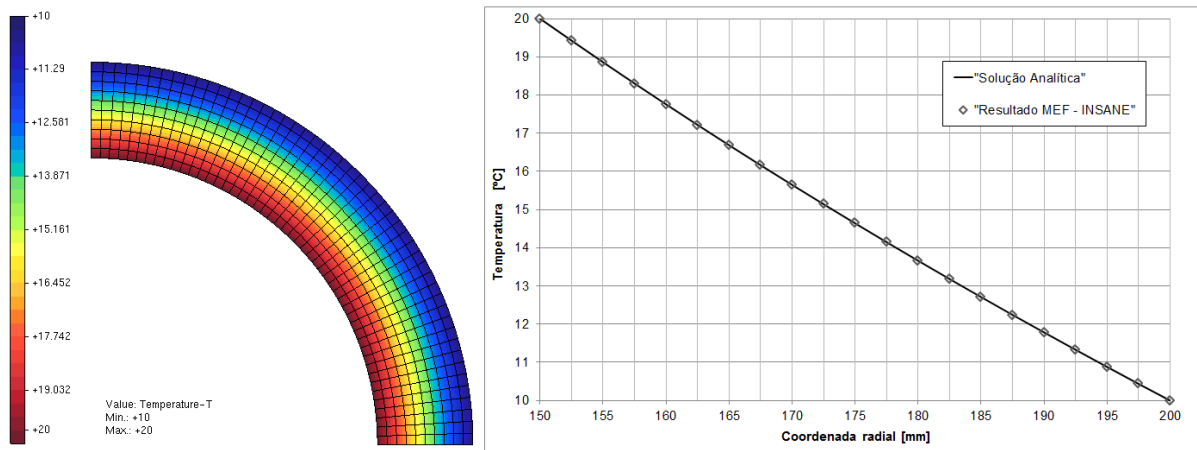


Figura 10. Distribuição de temperaturas obtida no INSANE e comparativo com a solução analítica.

Na análise termoestrutural do disco aquecido também se observou que os resultados numéricos se igualaram à solução analítica do problema. O comparativo entre os deslocamentos na direção radial calculados pelo MEF e pela Equação 20 está mostrado na Figura 11.

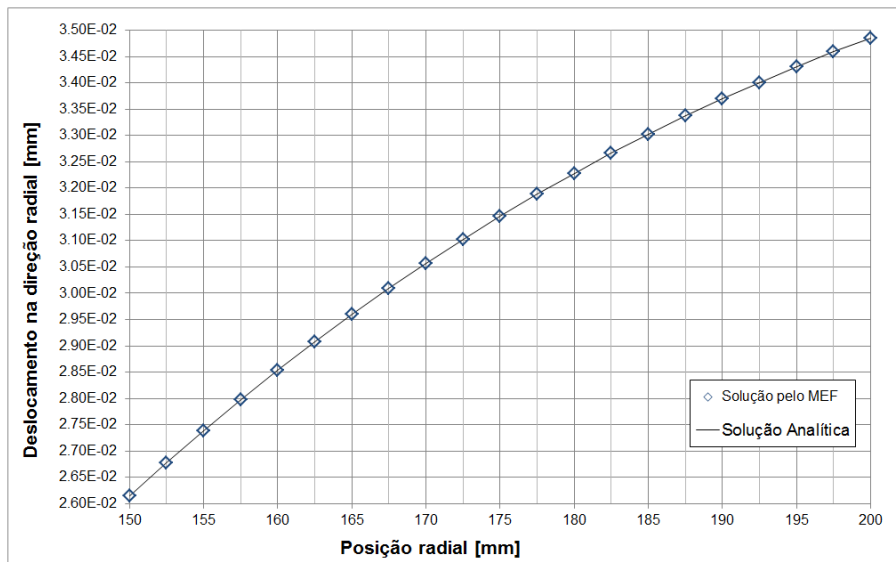


Figura 11. Deslocamento na direção radial devido à variação de temperatura.

A análise termoestrutural do disco aquecido também foi realizada utilizando elementos planos em um modelo de análise axissimétrico, conforme mostrado na Figura 12. Pode-se notar que os resultados das análises com modelos em EPT e com modelos Axissimétrico se igualaram à solução analítica, validando as novas ferramentas de cálculo térmico e termoestrutural para modelos bidimensionais.

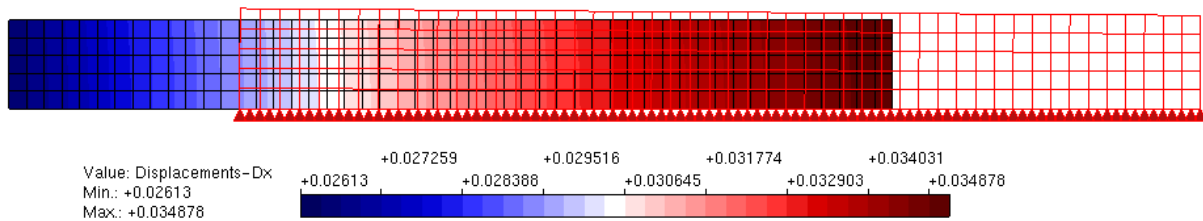


Figura 12. Deslocamento radial devido à variação de temperatura e forma deformada - Axissimétrico.

5.2.2 Cilindro longo

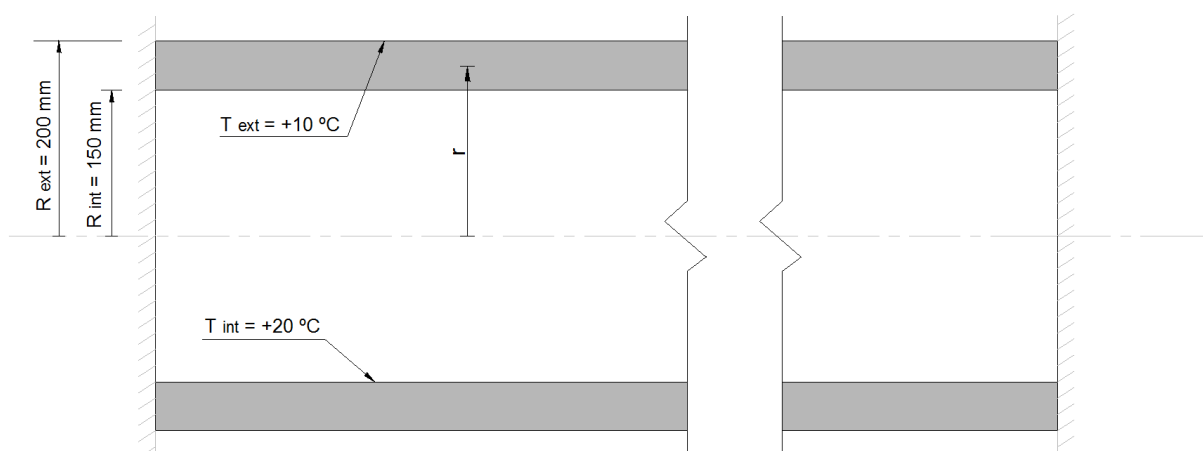


Figura 13. Cilindro longo com temperaturas prescritas nas faces interna e externa.

Um cilindro longo de parede espessa mostrado em corte na Figura 13, com dimensões da seção transversal idênticas à do disco mostrado na Figura 9, está submetido a um aumento de temperatura nas faces interna e externa de 20°C e 10°C, respectivamente.

Como ao longo de todo o comprimento as temperaturas nas faces interna e externa são constantes, não há fluxo de calor axial, e por isso a solução analítica para a distribuição de temperaturas ao longo de uma seção do cilindro é válida para todo o comprimento do mesmo e é idêntica à obtida para o disco aquecido no item 5.2.1.

Quanto à solução termoestrutural do problema, há um Estado Plano de Deformações (EPD) atuante nas seções transversais distantes das bordas. Este estado de tensões é caracterizado pelo impedimento ao deslocamento decorrente do efeito de Poisson, que deveria ocorrer na direção axial, o que leva ao surgimento de uma componente de tensão nesta direção.

Como descrito por Hetnarski (2009), a solução termoestrutural deste problema é dada pelas equações 23, 24, 25 e 26:

$$u_r^{EPD} = \frac{(1+\nu)\alpha}{(1-\nu)r} \left[\int_{r_{int}}^r T(r)rdr + \frac{r_{int}^2 + (1-2\nu)r^2}{r_{ext}^2 - r_{int}^2} \cdot \int_{r_{int}}^{r_{ext}} T(r)rdr \right]. \quad (23)$$

$$\sigma_{rr}^{EPD} = \frac{E\alpha}{(1-\nu)} \left[\frac{1}{(r_{ext}^2 - r_{int}^2)} \left(1 - \frac{r_{int}^2}{r^2} \right) \cdot \int_{r_{int}}^{r_{ext}} T(r)rdr - \frac{1}{r^2} \int_{r_{int}}^r T(r)rdr \right]. \quad (24)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{EPD} = \frac{E\alpha}{(1-\nu)} \left[\frac{1}{r^2} \int_{r_{int}}^r T(r)rdr - T(r) + \frac{1}{(r_{ext}^2 - r_{int}^2)} \left(1 + \frac{r_{int}^2}{r^2} \right) \cdot \int_{r_{int}}^{r_{ext}} T(r)rdr \right]. \quad (25)$$

$$\sigma_{zz}^{EPD} = \frac{E\alpha}{(1-\nu)} \left[\frac{2\nu}{(r_{ext}^2 - r_{int}^2)} \int_{r_{int}}^{r_{ext}} T(r)rdr - T(r) \right]. \quad (26)$$

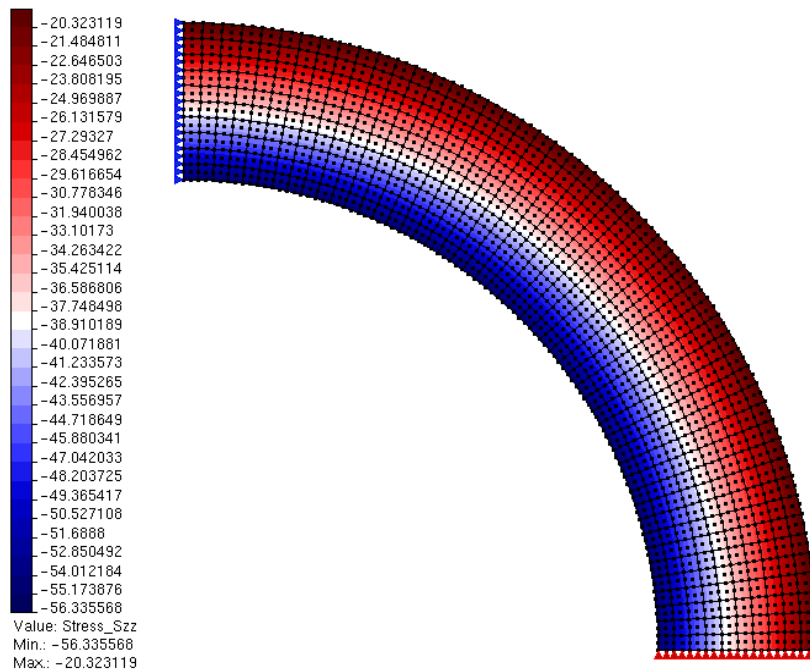


Figura 14. Tensões σ_{zz} na direção perpendicular ao plano da seção obtidas com o INSANE.

Como dito acima, a solução da distribuição de temperaturas é idêntica para os problemas do disco aquecido e do cilindro longo. Desta forma, a distribuição de temperaturas da Figura 10 foi utilizada também como carregamento na análise termoestrutural do cilindro longo.

O campo das tensões normais que atuam na direção axial (σ_{zz}), que é descrito analiticamente pela Eq. (26) para o problema do cilindro longo, foi calculado pelo MEF utilizando os novos recursos do INSANE aplicados aos elementos finitos bidimensionais no modelo de análise de EPD, Figura 14, e no modelo de análise Axissimétrico, Figura 15.

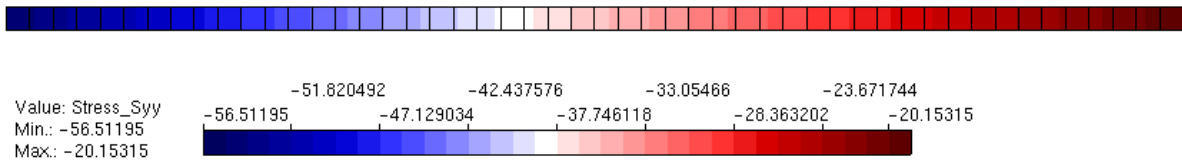


Figura 15. Tensão na direção axial do cilindro longo (σ_{zz}), calculada com um modelo Axissimétrico.

Pode-se observar que as soluções pelo MEF com os modelos de análise Axissimétrico e EPD se aproximaram da solução analítica, que corresponde a -56,32 MPa no raio interno e -20,32 MPa no raio externo.

5.2.3 Viga com variação de temperatura linear ao longo da altura

A viga bi-apoiada mostrada na Figura 16 está submetida a um aumento de 10°C em sua face inferior e a uma redução de 10°C em sua face superior. O comprimento total da viga é 200mm, a largura é 10mm e sua altura é 20mm.

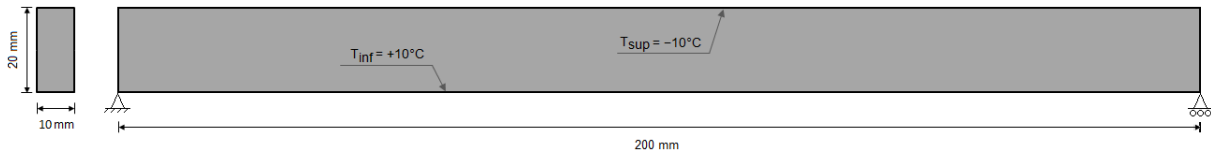


Figura 16. Viga bi-apoiada com variação de temperatura ao longo da altura.

Visto que as variações de temperatura nas faces superior e inferior são constantes ao longo do comprimento da viga, não há condução de calor na direção longitudinal, assim como considerado no caso do cilindro longo, e por isso o problema se reduz ao caso unidimensional da condução de calor, que conforme descrito por Incropera et. al. (2001), é dado por:

$$\frac{d}{dy} \left(k_y \frac{dT}{dy} \right) = 0, \quad (27)$$

cuja solução obtida por integração, para o caso de condutividade térmica constante e condições de contorno de temperaturas conhecidas nas extremidades, é dada por:

$$T(y) = (T_{\text{sup}} - T_{\text{inf}}) \frac{y}{h_{\text{viga}}} + T_{\text{inf}}. \quad (28)$$

A distribuição de temperaturas descrita pela Equação 28 introduz um momento fletor constante ao longo do comprimento da viga dado por:

$$M_z = \frac{E\alpha(T_{\text{sup}} - T_{\text{inf}})I_z}{h_{\text{viga}}}. \quad (29)$$

Sob esta condição de carregamento, a linha elástica da viga é descrita pela equação abaixo:

$$v(x) = \frac{\alpha(T_{\text{sup}} - T_{\text{inf}})I_z}{2 \cdot h_{\text{viga}}} (x \cdot L_{\text{viga}} - x^2). \quad (30)$$

Substituindo as dimensões e temperaturas prescritas, obtém-se o valor analítico da flecha no centro do vão igual a -0.06 mm e da rotação igual a ± 0.0012 radianos nas extremidades da viga.

A análise realizada pelo MEF como o modelo de Estado Plano de Tensão para a viga ilustrada na Figura 16 está apresentada na Figura 17. Somente metade da viga foi modelada devido à característica de simetria do problema.

A comparação entre o resultado numérico e o analítico para a flecha da viga avaliada na linha neutra está apresentada na Figura 18. Pode-se notar que a solução analítica do problema foi devidamente reproduzida pelo MEF com a utilização dos novos recursos implementados no INSANE.

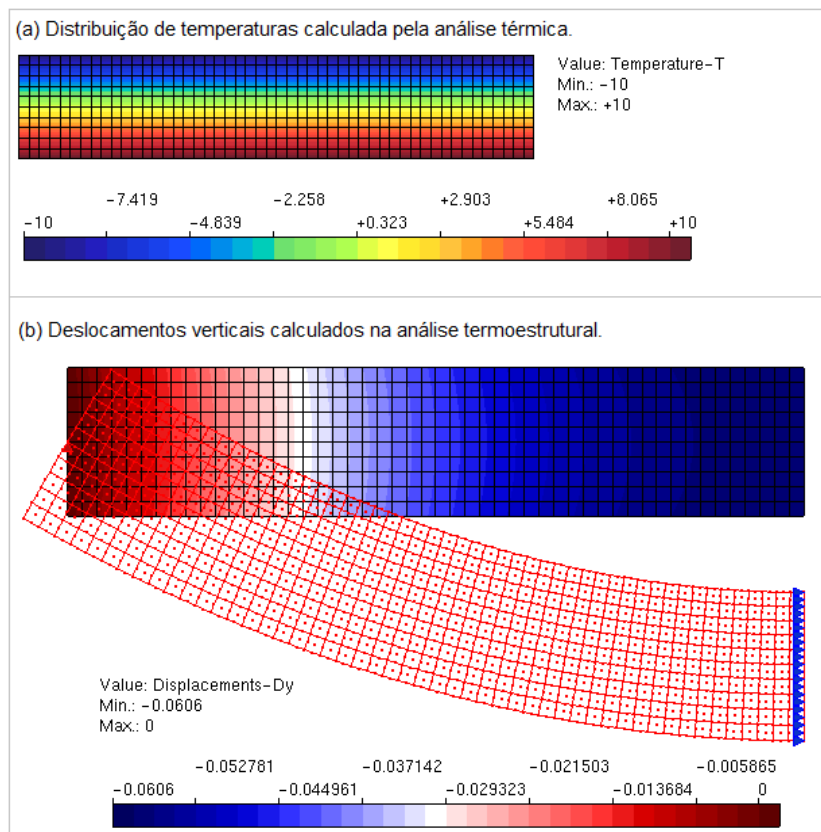


Figura 17. Análise termoestructural da viga bi-apoiada utilizando o modelo de EPT.

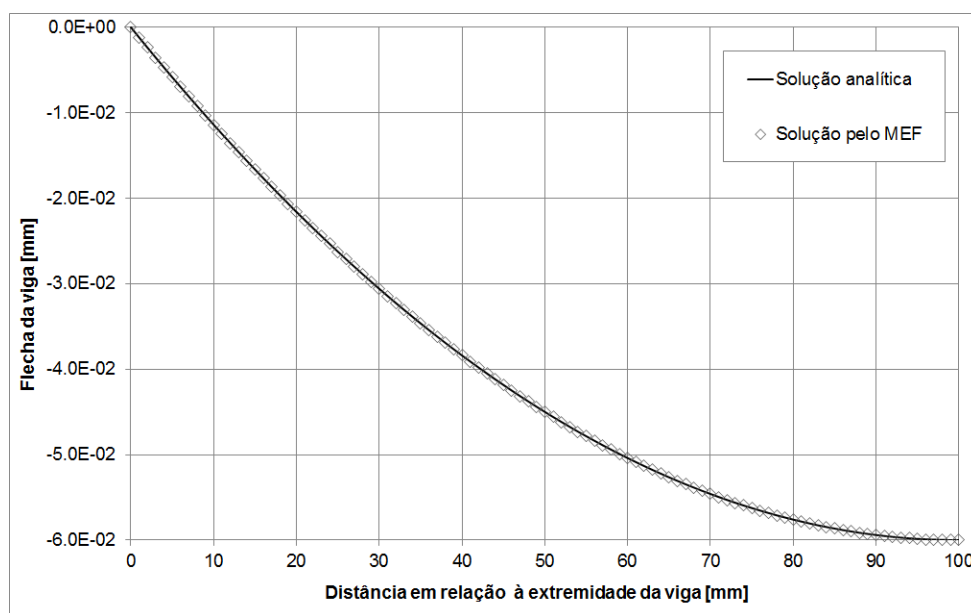


Figura 18. Comparativo entre a solução analítica e os resultados obtidos com o INSANE.

5.3 Elementos finitos tridimensionais

O problema selecionado para a validação dos novos recursos do INASNE quando são utilizados elementos finitos tridimensionais foi a barra descrita no item 5.1. Esta barra está restrita à translação nas extremidades e está submetida a uma variação de temperatura linear ao longo de seu comprimento.

A distribuição de temperaturas obtida pelo MEF com o INSANE está mostrada na Figura 19 e se igualou à solução analítica do problema.

Quanto à análise termoestrutural mostrada na Figura 20, observou-se que a tensão atuante na barra se igualou ao valor analítico, -126 MPa, nas regiões distantes das extremidades, validando as ferramentas desenvolvidas para o cálculo térmico e termoestrutural para modelos tridimensionais.

Os efeitos de borda observados na Figura 20 se devem ao impedimento à translação nas extremidades da barra.

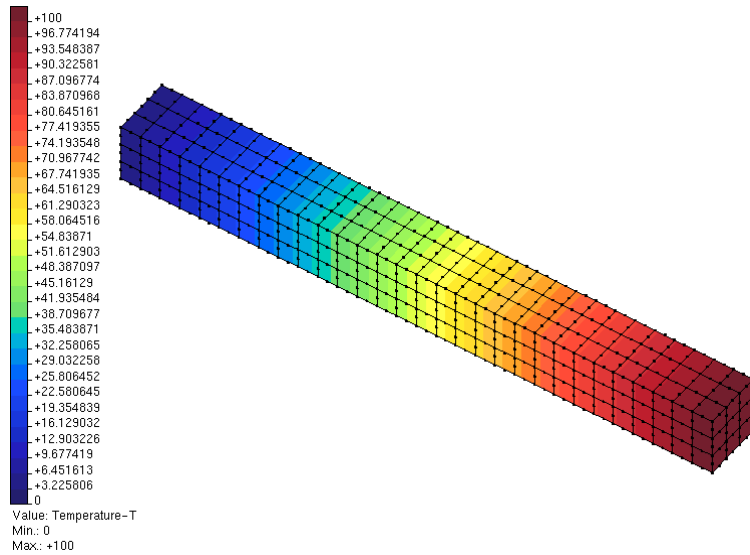


Figura 19. Comparativo entre a solução analítica e os resultados obtidos com o INSANE.

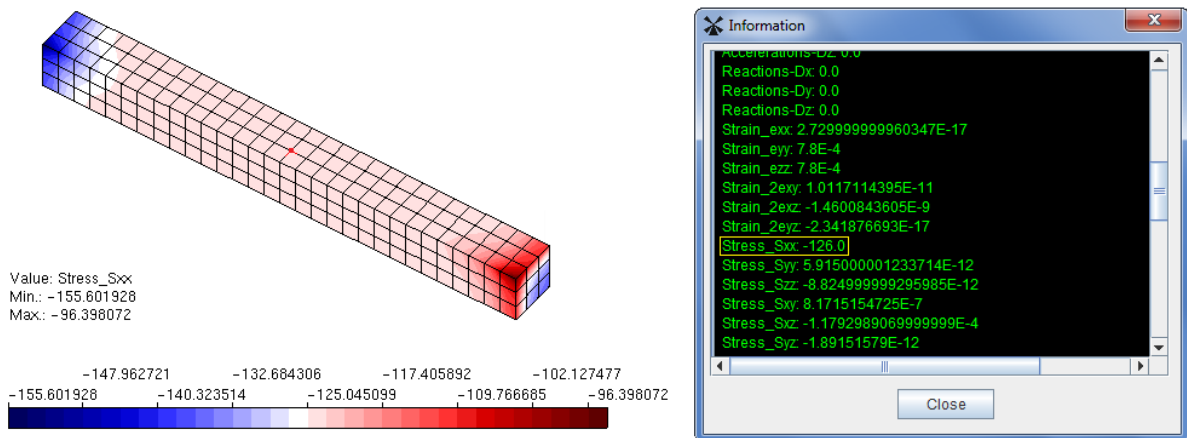


Figura 20. Distribuição de tensões normais na direção longitudinal da barra.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o importante suporte dos órgãos FAPEMIG (Fundação de Amparo à Pesquisa do estado de Minas Gerais) e CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico).

REFERÊNCIAS

- Alves, P. D., Barros, F. B., Pitangueira, R.L.S., 2013. *An object-oriented approach to the Generalized Finite Element Method. Advances in Engineering Software*, vol. 59, pp. 1–18.
- Fonseca, F. T., 2008. Sistema Computacional para Análise Dinâmica Geometricamente Não-Linear Através do Método dos Elementos Finitos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.
- Hetnarski, R., Eslami, M., 2009. *Thermal Stresses – Advanced Theory and Applications*. Springer.
- Incropera, F. P., Dewitt, D. P., Bergmann, T. L., Lavine, A. S., 2011. *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*, 7th ed. John Wiley & Sons.
- Logan, D. L., 2002. *A First Course in the Finite Element Method*, 3rd Edition, Brooks/Cole.
- Monteiro, A. B., Wolenski A.R.V., Penna S.S., Barros, F.B., Pitangueira, R.L.S. 2014. *Application of the Generalized Finite Element Method on the Physically Nonlinear Analysis of Structures. CILAMCE (Iberian-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering)*.
- Navarra, E. O. I., 1995. *Calculo de Estructuras por el Metodo de Elementos Finitos, Segunda edición*.
- OMG – Object Management Group. Unified Modeling Language™ (UML®), disponível em <http://www.uml.org/> , acessado em 24/08/2015.
- W3C. XML Technology, disponível em: <http://www.w3.org/XML/> , acessado em 24/08/2015.
- Weaver Jr., W., Johnston, P. R., 1984. *Finite Elements for Structural Analysis*, Prentice-Hall. Prentice-Hall, Nova Jersey, EUA
- Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., 2000. *The Finite Element Method, 5th ed, Volume 1: The Basis, Butterworth-Heinemann*.